

国家自然科学基金研究专著
NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA

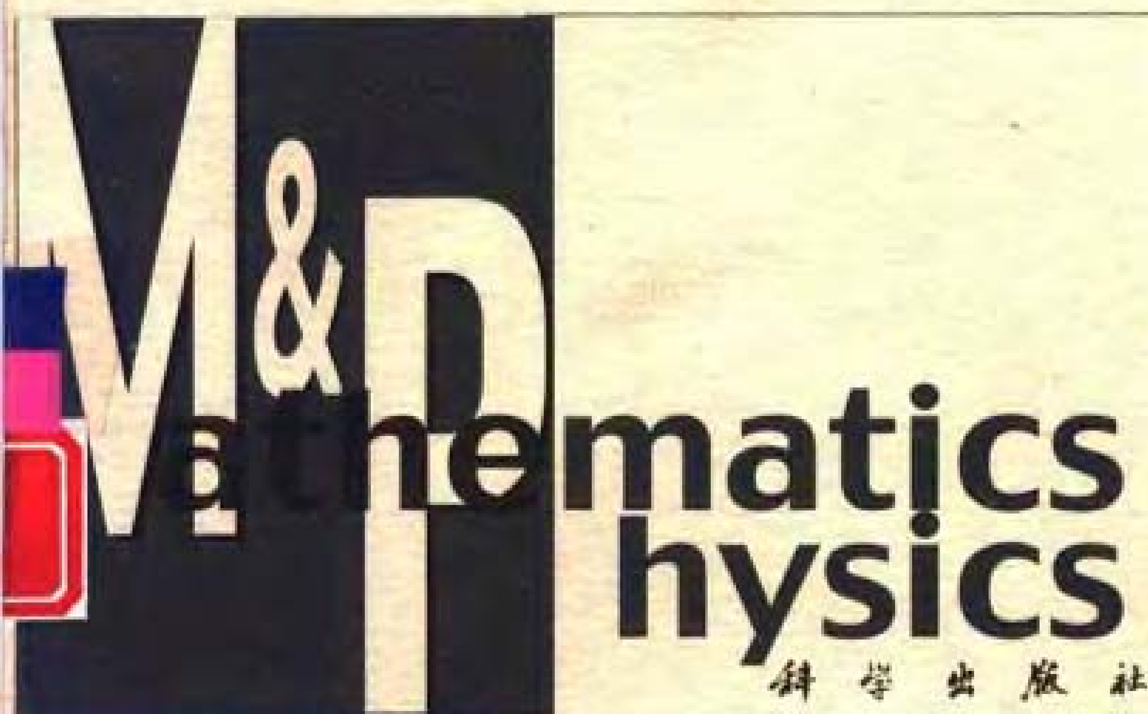
数理科学系列

NSFC



计算流体力学基本原理

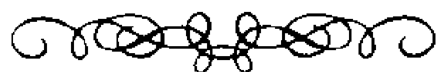
吴子牛　编著



科学出版社



国家自然科学基金研究专著
NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA



计算流体力学基本原理

吴子牛　编著

科 学 出 版 社

内 容 简 介

《计算流体力学基本原理》把计算流体力学作为一门独立的学科进行介绍.它涉及计算流体力学较为规范的内容,包括流体力学的基本原理、流体力学基本方程的计算形式与配套模型、方程的基本理论、构造计算方法的基本原则、计算方法的分析理论和一些实用化计算技术.

本书可供从事计算流体力学的科研、技术人员参考,也可以作为流体力学专业和应用数学专业研究生和本科生的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学基本原理/吴子牛编著.—北京:科学出版社,2001

ISBN 7-03-008128-5

I.计…　II.吴…　III.计算流体力学　IV.O35

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第61451号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

2001年2月第一版　开本:787×1092　1/16

2001年2月第一次印刷　印张:18 1/2

印数:1—2 800　字数:416 000

定价:35.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换(北燕))

前　　言

计算流体力学(简称 CFD,来源于英文的 Computational Fluid Dynamics)作为一门独立的学科在近三十年成为流体力学与应用数学的热门研究内容.计算流体力学的发展促使人们去重新书写流体力学基本方程和构造物理模型、重新了解基本方程的性质、重新理解传统差分的局限、重新研究一整套研究稳定性、收敛性、唯一性的理论.计算流体力学有属于它的基本理论、基本方法、基本逻辑和它独特的应用范围,因而属于一门独立的学科.计算流体力学的发展不但为流体力学研究提供了一种手段,而且带动了应用数学的发展和促进了计算机的发展.

本书介绍计算流体力学最基本的原理.本书与一般计算流体力学书籍相比,并不深入介绍具体的计算方法,而是试图把计算流体力学作为一门相对独立的学科来论述,内容包括如下几乎具有同等重要性的六个方面:

一、流体力学基本原理.流体力学基本原理自然是计算流体力学的基础.流体力学本身包含了丰富的知识,但这里介绍的基本原理只涉及流体运动学基础、动力学方程和方程的特殊形式.流体力学基本原理将在第一章中介绍,主要强调流体力学基本方程是如何构造的,如何推导它们的一些特殊形式和在不同坐标系中的形式.即使对具有一定流体力学基础的读者也建议不要越过这一章,因为本章内容的取舍考虑了计算流体力学的需要.虽然许多知识尤其是运动学基础是一般读者非常熟悉的,但也包含了一些读者不一定熟悉的内容,如在非惯性坐标系下能量方程的推导.本章所强调的分析思维有助于读者阅读本书其他部分的内容.另外,本书绝大多数章目都有边界条件(包括内边界条件)的讨论,了解不同部分给定边界条件的方式能帮助正确理解如何处理边界条件.

二、流体力学基本方程的计算形式和模型化处理.在连续介质力学范畴下,流体力学基本方程为纳维-斯托克斯方程(Navier - Stokes 方程,简称 N-S 方程),在理想流体假设下为欧拉方程(Euler 方程).基本方程有多种形式,但必须写成一些特殊形式(计算形式)才便于用标准的计算方法求解.另外一般流体力学问题包含有由小到大的多种尺度,而一般计算只考虑某种宏观尺度.为了只计算宏观尺度并考虑其他尺度的部分影响,必须进行模型化处理.流体力学基本方程的计算形式和模型化处理将在第二章介绍,主要强调 N-S 方程和欧拉方程的几种计算形式及其由来(包括所有的雅可比矩阵的计算及其对角化处理),和具有典型多尺度效用的湍流和两相流问题的模拟原理、特征多尺度问题的统一计算方法、方程的无量纲化处理.模型化处理是计算流体力学的一部分特殊的而且十分重要的内容,在本书中以适当篇幅介绍,目的是体现计算流体力学基本原理的完整性.

三、基本方程的性质.N - S 方程作为数学上的偏微分方程具有许多特殊性质,数学研究还很不完善,数学上甚至很难证明 N - S 方程是否有解.解的存在性、唯一性与稳定性

是偏微分方程理论中的基本问题，即所谓的适定性问题.N－S方程很特别，属于一种混合型方程，不同分量方程的性质不一样；对于不同流动条件，方程的性质又不一样，但在理想流假设下N－S方程即欧拉方程的基本性质决定了计算流体力学的地位.欧拉方程的处理是计算流体力学的关键.欧拉方程在数学上属于双曲守恒方程，包含了丰富的数学内容，如适定性、特征理论、弱解理论、熵条件等.这些内容的研究构成了计算流体力学方法研究的基础，将在第三章中介绍.

四、构造计算方法的基本原理.N－S方程属于非线性偏微分方程组，在一般情况下是无法求解析解的，因此必须用计算机求解.计算机只能进行大量的加减乘除等简单代数运算，计算机的这种运算速度是人的运算速度无法比拟的.通过用差分或其他办法把非线性偏微分方程转化为只包含简单加减乘除等运算的代数方程组，编成程序后让计算机去按规定顺序重复地不厌其烦地完成这些代数运算，便是构造计算方法的目的所在.但流体力学方程的计算包含了一系列特殊问题，如果把计算方法中介绍的简单差分直接用于将方程离散，那么所获得的数值方法或格式并不一定能计算流动问题.流体力学基本方程必须用基于方程基本性质所构造的特殊方法才能求解，而且不同问题的求解对算法又有不同要求.第四章将介绍构造计算方法的基本原理，包括有限差分方法、非线性守恒系统的计算方法、边界处理的基本原理和时间积分方法.

五、计算方法的分析理论.随意构造的计算方法不一定能直接使用.计算方法必须满足一些特性才能使用，这些特性包括稳定性、精度、收敛性、守恒性等.第五章将介绍这些特性的分析理论.掌握这些分析理论有助于读者正确使用具体的计算方法，也可以帮助构造新的计算方法.本章介绍的分析理论包含了一般计算流体力学书籍不存在的内容，如边界处理的稳定性理论、收敛性理论、解的唯一性理论、守恒性理论、分区内边界处理的分析方法等.

六、实用化基础.虽然本书强调的是计算流体力学基本原理，目的不是让读者了解一些能立即用于解决实际问题的具体方法，但作为结尾介绍一些实用化基础是必要的.第六章将介绍一些实用化基础，包括网格系统的一些基本概念、将数值方法推广到高维问题的基本方法、高维问题边界处理方法、并行计算的一些概念和实际计算的一些经验.这些经验是作者的一些个人经验，只供参考.

本书对计算流体力学的一些特殊方法（如拉格朗日方法、有限元方法、谱方法、玻尔兹曼方法、格子气方法等）并不介绍，原因是这些特殊方法太多强调数学味道，或者还没有达到实用的程度.

在计算流体力学方法研究中，主要存在两种思路.一种是应用数学家针对空气动力学问题发展的可压缩流动计算方法，另一种是物理学家针对传热问题发展的不可压缩流动计算方法.通过某种特殊处理，两种思路都试图将方法推广到另一种思路所侧重的问题.本书只介绍第一种思路及第一种思路所涉及的问题.

本书尽量避免过于深奥的内容和手册式的介绍，尤其是本书中计算方法的介绍基本只占篇幅的六分之一.熟悉湍流模拟的读者一定会觉得，第二章中有关湍流模拟的介绍过于简单.为了强调整体内容的协调性，我们不得不将许多重要内容放弃或者淡化.实际上本书中任何一章甚至一小节的内容都可能在专著中介绍.以有限的篇幅尽量协调和连贯

地介绍计算流体力学部分最核心的内容,正是作者编写本书的目的所在.

由于作者水平有限和时间仓促,书中不可避免地存在一些失误和不足的地方,希望读者批评指正.

作　者
2000年3月于清华园

本书主要符号

t　时间

$\boldsymbol{x}$　空间坐标

x, y, z 或 x_1, x_2, x_3　空间坐标的三个分量

$\boldsymbol{V}$　速度矢量

u, v, w 或 V_1, V_2, V_3 或 V_x, V_y, V_z　速度的三个分量

$\boldsymbol{S}$　应变率张量

$\boldsymbol{P}$　应力张量

ρ　密度

p　压力

T　温度

e　内能

E　总能

H　总焓

S　熵

a　音速

Ω　有限体积

$\sum$　有限体积的边界

$\boldsymbol{V}_{\sum}$　有限体积边界的移动速度

$\boldsymbol{n}=(n_x,n_y,n_z)$　表面单位法向矢量

$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$　笛卡儿坐标系的三个基矢量

$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_z$　柱坐标系的三个基矢量

$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x,\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y,\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)$　梯度算子

k,h,σ　时间步长,空间步长,时间步长与空间步长的比

$\boldsymbol{R}$　实数集

$\boldsymbol{C}$　复数集

$\boldsymbol{R}^+$　正实数集

$\boldsymbol{R}^-$　负实数集

$\boldsymbol{C}_0^p$　具有直至 p 阶连续偏导数的紧支集

ι　虚数单位($\iota=\sqrt{-1}$)

目　　录

第一章　流体力学基本原理

流体力学基本原理是计算流体力学的基础.这里简要介绍连续介质力学假设下流体力学最基本的原理,包括流体运动学基础、流体动力学基础和基本方程的一些特殊形式.内容的取舍和安排部分地考虑了计算流体力学的需要.

1.1　流体运动学基础

1.1.1　描述流体运动的基本方法

在连续介质力学假设前提下,流体力学描述流体微团集合的运动状态.流体微团属于充满流体介质的空间中的微观上足够大(远远大于分子运动平均自由程)而宏观上足够小(远远小于所感兴趣的流体运动空间尺度)的一团流体.在宏观上把流体微团看成一个质点.有了流体微团这一定性认识后,在实用中不必再去关心微团有多大.

描述流体运动的方法有两种:欧拉方法(E),拉格朗日方法(L).有时也会看到所谓的欧拉-拉格朗日混合方法.这些方法主要描述流体微团集合的运动状态,即流动参数 ϕ 的变化.流动参数包括运动特征量(如流体微团的速度 $\boldsymbol{V}$)和热力学状态特征量即物性参数(如流体微团的压力 p,密度 ρ,温度 T).流动参数的变化是针对时间 t 甚至空间(坐标为 $\boldsymbol{x}$)的变化.相应地,流动参数称为未知数或因变量,而时间甚至空间坐标称为自变量(空间坐标是否为自变量取决于是否采用欧拉描述法).

欧拉方法　在任意指定时刻,描述流动参数的空间分布.以时空坐标$(\boldsymbol{x},t)$为自变量,将流动参数(主要有速度、密度、压力和温度以及它们的组合)表示为时空坐标的函数(流动参数分布;也称参数场,如速度场和温度场)

$$\phi = \phi(\boldsymbol{x},t) = \phi_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x},t).$$

拉格朗日方法　从某时刻开始跟踪每一流体质点,记录对应质点流动参数的变化.以初始时刻坐标 $\boldsymbol{A}$ 和时间 t 为自变量,将流动参数(主要有质点位移 $\boldsymbol{x}$、密度、压力和温度等)表示为

$$\phi = \phi(\boldsymbol{A},t) = \phi_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A},t).$$

质点位移函数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A},t)$(质点轨迹)也是因变量,它与初始坐标 $\boldsymbol{A}$ 成一一对应关系,即:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A},0) = \boldsymbol{A},\\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A},t)\Rightarrow\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t).\end{cases}$$

两种方法可以按下面方式进行转换：

L-E 变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}, t) \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$,

$$\phi = \phi_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A}, t) = \phi_{\mathrm{L}}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t), t] = \phi_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x}, t),$$

$$\boldsymbol{V} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}, t)}{\partial t}\right]_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A}, t) = \boldsymbol{V}_{\mathrm{L}}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t), t] = \boldsymbol{V}_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x}, t).$$

E-L 变换 $\boldsymbol{V} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}, 0) = \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}, t)$,

$$\phi = \phi_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x}, t) = \phi_{\mathrm{E}}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}, t), t] = \phi_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A}, t).$$

欧拉描述法中的流动参数如果与时间无关，即 $\phi = \phi(\boldsymbol{x})$，那么相应的流动称为定常流动，否则称为非定常流动. 一般很难存在严格意义上的定常流动. 但如果流动参数随时间的变化与所关心的平均值相比小得可以忽略不计，而且这种变化引起的宏观效应可以忽略不计，则一般可以按定常流动处理. 实际的定常流动或计算出的定常流动往往是由非定常流动经过一段时间的变化过渡来的. 如果采用拉格朗日法，则区别定常与非定常流动不那么直观①.

如果流动参数只与坐标的一个(如 x)、两个(如 x, y)、或三个分量有关，则相应的流动称为一维、二维或三维流动. 以后会看到，二维流动中还有所谓的平面二维流动和轴对称二维流动. 这种分类属于物理分类，还有工程或数学上的人为分类(主要是为了处理方便)，读者阅读某些流体力学书籍时会遇到零维流动、准一维流动等概念. 还有一种特殊方法，将时间、几何空间、参数空间(包括速度、温度、密度，等等)看成统一的自变量即统一空间来研究流体质点在统一空间某点出现的概率. 统一空间(也称为状态空间)的维数可能超过十维. 这种描述方法称为 PDF 方法.

1.1.2 流场结构的几何描述

流线为固定时刻空间曲线(速度场矢量线)，曲线上任意点的切向矢量与当地的速度矢量重合，属于欧拉场描述法. 取 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{E}}$(速度为欧拉场速度)，确定参数形式的流线 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$的方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} \times \boldsymbol{V} = 0 \quad (\text{基本定义}),$$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{V_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{V_2} = \frac{\mathrm{d}x_3}{V_3} = \mathrm{d}s \quad (\text{等价形式 } 1),$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{V} \quad (\text{等价形式 } 2).$$

流线具有如下性质：

---

① 可以证明，对于拉格朗日法，定常流动条件可以表示为：

$$\frac{\partial \phi_{\mathrm{L}}}{\partial t} - \frac{\partial \phi_{\mathrm{L}}}{\partial \boldsymbol{A}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}_{\mathrm{L}}}{\partial \boldsymbol{A}}\right)^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{x}_{\mathrm{L}}}{\partial t} = 0.$$

1)除奇点($V=0,V=\infty$)外,同一时刻流场中的不同流线不相交(因空间每点只有一个速度方向,所以除奇点(速度为0点,速度为∞)外,流线不会以有限角相交,但可以相切);

2)对于非定常流动,不同时刻通过同一点的流线可以不重合;

3)对于定常流动和直线流动,不同时刻通过同一点的流线重合.

流面为某时刻过给定曲线(非流线)上每点做流线组成的面,从而在流面上 $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=0$,这里 $\boldsymbol{n}$ 为曲面的单位法向矢量.

流管为某时刻过给定闭曲线(非流线)上每点做流线组成的管状面,从而在流管壁上 $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=0$. 根据物质不生不灭原理,流管不能在流体中间中断,否则流体在中断处不见了. 流管是由流线组成的,因流管不能中断,所以流线也不能在流体中中断. 流管和流线或形成闭环、或终止于边界、或终止于奇点.

将反映主要流动特征的流线画出得流线谱(画出所有过奇点的流线,画出与过奇点流线渐近的流线,画出边界线). 流线谱用于显示流动规律,已经存在可以画流线谱的标准软件.

迹线为给定流体质点的运动轨迹,方程为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{A},t)\ (\text{拉格朗日法}),$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x},t)\ (\text{欧拉法}).$$

流线和迹线的区别在于:

1)流线是由同一时刻、不同质点连起来的速度矢量场即为瞬间速度场状态;迹线是同一质点在不同时刻的位移曲线(即指定质点的运动过程). 因此对于非定常流场流线迹线一般不重合,除非所有质点的流动都沿一个方向.

2)对于定常流场,通过同一点的流线不随时间变化,且任意时刻通过同一空间点的迹线与流线重合. 这是因为,两条线的切线都与当地速度方向一致,对于定常问题流线不随时间变化. 因任意点只有一个速度方向,所以经过同一点的迹线与流线不可能在某点分开,否则在分开点出现两个速度方向. 也可以从定常流动时确定它们的方程的等价性看出:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}(s=0) = \boldsymbol{A}\ \text{流线},$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}(t=0) = \boldsymbol{A}\ \text{迹线}.$$

1.1.3　质点加速度、质点导数

考虑时刻 t 处于坐标 $\boldsymbol{x}$ 的流体质点. 对应欧拉描述法该流体质点速度为 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$. 在时刻 $t+\delta t$,该流体质点运动到 $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{V}\delta t$. 在时刻 $t+\delta t$ 处于坐标 $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$ 的流体质点的速度为 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x},t+\delta t)=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{V}\delta t,t+\delta t)$. 所以,质点加速度为

$$a = \lim_{\delta t \to 0} \left[\frac{V(x + V\delta t, t + \delta t) - V(x, t)}{\delta t} \right]$$

$$= V_t + V_j V x_j, \tag{1.1}$$

即

$$a = V_t + (V \cdot \nabla) V.$$

这里 V_t 为当地加速度，由流场的非定常效应产生；$(V \cdot \nabla) V = V_s \dfrac{\partial V}{\partial s}$ 为迁移加速度，沿流场速度方向($s = V/|V|$)，由速度场的空间非均匀性产生.

对于拉格朗日方法，质点加速度按下式计算：

$$a = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_A (x = x_L(A, t)).$$

利用上式和$\left(\dfrac{\partial x}{\partial t}\right)_A = V_E(x, t)$将质点位移导数转换为欧拉描述法中的速度，即

$$a = \left(\frac{\partial V_E(x, t)}{\partial t}\right)_A = \left(\frac{\partial V_E(x(A, t), t)}{\partial t}\right)_A,$$

则同样可以得到方程(1.1).

质点携带的物理量随时间的变化率称为质点导数(有时称物质导数或随体导数). 这一定义的特殊性在于，我们按拉格朗日方法来定义变化率，但又要使用欧拉方法中的变量. 质点导数与前面加速度的定义(1.1)完全类似. 加速度属于速度的质点导数. 按质点加速度同样的定义方式，得某物理量 $\phi(x, t)$的质点导数的数学定义

$$\frac{D\phi(x, t)}{Dt} = \lim_{\delta t \to 0, \delta x \to 0, \frac{\delta x}{\delta t} = V} \left[\frac{\phi(x + \delta x, t + \delta t) - \phi(x, t)}{\delta t} \right]$$

$$= \phi_t + V \cdot \nabla \phi$$

因此，质点导数$\dfrac{D\phi(x, t)}{Dt}$等于局部导数$\phi_t = \dfrac{\partial \phi}{\partial t}$与对流导数$V \cdot \nabla \phi$ 的和. 习惯上，我们说局部导数是由流动的非定常变化引起的效应，对流导数是通过对流(即流动)把周围流动参数的不同值给带过来引起的效应. 或者说，流体质点所携带的物理量随时间的变化，如果以欧拉方法来衡量，来源于流动参数本身的非定常性和空间分布的非均匀性. 因此流动参数不变可以有多种解释.

例如，不可压缩流体指的是密度的质点导数处处为零即质点的密度不随时间变化. 但密度的质点导数为零并不意味密度不随时间变化或者密度不随空间坐标变化. 例如，考虑密度沿垂直方向(z)均匀变化的不可压缩液体，即密度分布为 $\rho = \rho(z)$. 现在让这种液体以恒速度 w 上升. 现在考虑固定空间点 z 密度的变化，在任意时刻 t，固定空间点流体质点显然来自初始时刻处于 $z_0 = z - wt$ 的流体质点. 因此，在时刻 t，位于空间点 z 的流体质点的密度为$\rho(z - wt)$. 虽然任意流体质点是不可压缩的即$\dfrac{D\rho}{Dt} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + w\dfrac{\partial \rho}{\partial z} = \rho'(z - wt)(-w + w) = 0$，但在任意点密度是随时间变化的，而且空间分布也不均匀.

1.1.4 流体微团运动分析

用泰勒展开,并保留低阶项,得距离为 $\delta \boldsymbol{x}$ 的相邻两流体质点的速度差所满足的关系式

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{V} &= \nabla \boldsymbol{V} \cdot \delta \boldsymbol{x} \\ &= \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{V} + \nabla \boldsymbol{V}^t) \cdot \delta \boldsymbol{x} + \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{V} - \nabla \boldsymbol{V}^t) \cdot \delta \boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{S} \cdot \delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{A} \cdot \delta \boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

这里,$\nabla \boldsymbol{V}$ 为速度梯度张量($\nabla \boldsymbol{V}^t$ 为 $\nabla \boldsymbol{V}$ 的转置),它可以分解为如下的对称张量和反对称张量

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{V} + \nabla \boldsymbol{V}^t) = (s_{ij}), \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{V} - \nabla \boldsymbol{V}^t) = (a_{ij}).$$

进一步有

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right),$$

$$s_{ij} = s_{ij}' + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\delta_{ij},$$

$$s_{ij}' = s_{ij} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\delta_{ij},$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right),$$

因此

$$\delta V_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\delta_{ij}\delta x_j + s_{ij}'\delta x_j + a_{ij}\delta x_j. \tag{1.2}$$

可以证明,$\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\delta_{ij}\delta x_j$ 表示各向同性的体积膨胀率即线变形率;$s_{ij}'\delta x_j$ 表示体积不变的纯变形率即角变形率;$a_{ij}\delta x_j$ 表示旋转运动(准刚体运动).因此,一点邻域内的相对运动可以分解为各向同性的体积膨胀运动(拉伸运动)、体积不变的纯变形运动和旋转运动(准刚体运动).称 $\boldsymbol{S}$ 应变率张量(包含线变形与角变形),$\boldsymbol{A}$ 为旋转张量.

针对二维问题,用几何方法对上面的速度分解进行进一步说明.

考虑矩形流体微团,顶点按逆时针顺序分别为 A,B,C,D,矩形的边长为 $\delta x, \delta y$,设 A 点的速度分量为 u, v.于是忽略高阶项后各点的速度分量为(图 1.1)

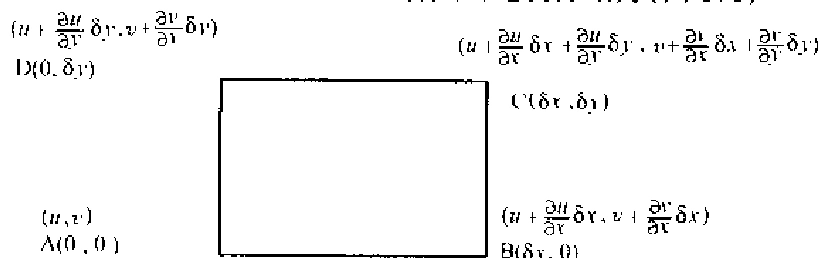


图 1.1 初始时刻的矩形及角点速度值

$$\begin{aligned}
&A: u, && v;\\
&B: u+\frac{\partial u}{\partial x}\delta x, && v+\frac{\partial v}{\partial x}\delta x;\\
&C: u+\frac{\partial u}{\partial x}\delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y, && v+\frac{\partial v}{\partial x}\delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y;\\
&D: u+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y, && v+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y.
\end{aligned}$$

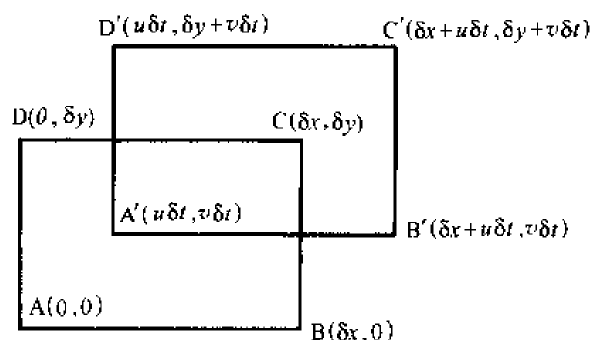


图 1.2　矩形的平动

因上述速度的各部分之间只是一种线性叠加，所以可以进行分解. 最简单、最符合逻辑的分解如下：

平动(图 1.2)

A: u, v;

B: u, v;

C: u, v;

D: u, v.

平动既不改变矩形的大小，也不改变矩形的形状.

拉伸运动或线变形(图 1.3)

$$\begin{aligned}
&A: 0, && 0;\\
&B: \frac{\partial u}{\partial x}\delta x, && 0;\\
&C: \frac{\partial u}{\partial x}\delta x, && \frac{\partial v}{\partial y}\delta y;\\
&D: 0, && \frac{\partial v}{\partial y}\delta y.
\end{aligned}$$

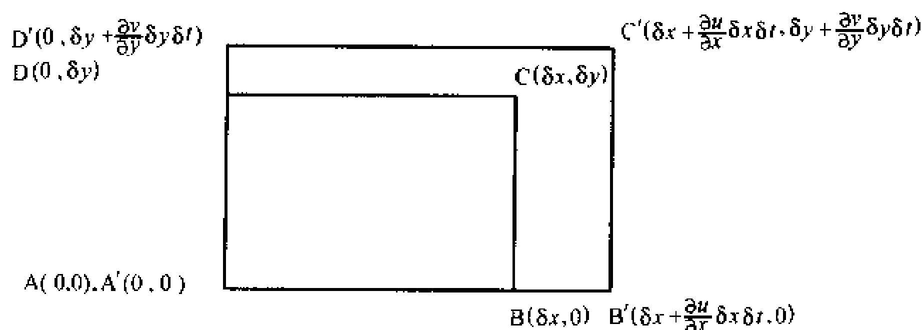


图 1.3　矩形的拉伸运动

拉伸运动虽不改变矩形的形状，但改变矩形的大小. 在初始时刻矩形的面积为 $S=\delta x\delta y$. 在时刻 δt，矩形的面积为 $S+\delta S=\left(\delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\delta t\right)\left(\delta y+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y\delta t\right)$.

于是，面积的变化率为 $\frac{\delta S}{S\delta t}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$.

旋转运动(图 1.4)

$$\begin{aligned}&A:0, && 0;\\ &B:0, && \frac{\partial v}{\partial x}\delta x;\\ &C:\frac{\partial u}{\partial y}\delta y, && \frac{\partial v}{\partial x}\delta x;\\ &D:\frac{\partial u}{\partial y}\delta y, && 0.\end{aligned}$$

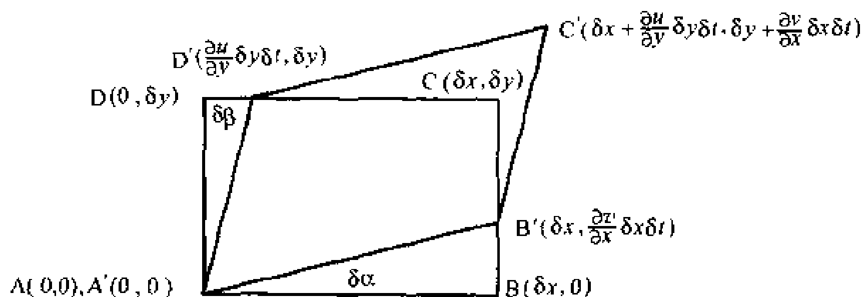


图 1.4　矩形的旋转运动

在 δt 时刻,AB 轴(逆时针为正)转动的角度为

$$\delta\alpha \approx \tan\delta\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\delta x\delta t}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}\delta t.$$

所以,AB 轴的转动角速度为$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v}{\partial x}$.

在 δt 时刻,AD 轴(逆时针为正)转动的角度为

$$\delta\beta \approx \tan\delta\beta = \frac{-\frac{\partial u}{\partial y}\delta y\delta t}{\delta y} = -\frac{\partial u}{\partial y}\delta t.$$

所以,AD 轴的转动角速度为$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial u}{\partial y}$.

一般情况下,AB 与 AD 轴的转动角速度不一样,即存在角变形.此时,把它们的平均值定义为流体微团的转动角速度 ε_z;把它们之差除以 2 定义成角变形率 γ_z.即

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right), \gamma_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

与二维问题类似,对于一般的三维问题,速度可以按如下方式进行几何分解:

A)体积变化率

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

B)绕 x,y,z 轴的转动角速度

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right), \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right), \varepsilon_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

C)绕 x,y,z 轴的角变形率

$$\gamma_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \gamma_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \gamma_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

事实上,可以将方程(1.2)写成下面的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}.$$

这里

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = Q_{\text{sym}} + Q_{\text{anti}},$$

其中

$$Q_{\text{sym}} = \frac{1}{2}(Q + Q^t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma_z & \gamma_y \\ \gamma_z & 0 & \gamma_x \\ \gamma_y & \gamma_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_{\text{anti}} = \frac{1}{2}(Q - Q^t) = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix}.$$

这里 Q^t 为 Q 的转置矩阵.显然,Q_{sym}为对称矩阵,Q_{anti}为反对称矩阵.于是,流体微团的线变形对应矩阵 Q 对称部分的对角线元素,流体微团的角变形对应矩阵 Q 对称部分的非对角线元素,流体微团的旋转运动对应矩阵 Q 反对称部分.于是证明了 Cauchy-Helmholtz 速度分解定理:流体微团上任意点的运动=参考点的移动+体积膨胀运动+角变形运动+旋转运动.

1.1.5 散度与旋度、速度位与流函数

速度的散度定义为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

考虑流体微团 Ω,其边界为 Σ.在运动过程中,以速度 $\boldsymbol{V}$ 运动的边界元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$ 在单位时间扫过的体积为 $\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}$,因此 Ω 的体积变化为

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \mathrm{d}\Omega = \int_\Sigma \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}.$$

由高斯定理得

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{V} \mathrm{d}\sigma \to \Omega \nabla \cdot \boldsymbol{V},$$

所以,

$$\frac{1}{\Omega} \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} \Big|_{\Omega \to 0} = \nabla \cdot \boldsymbol{V}.$$

因此,散度为标定流体微团在运动过程中的体积变化率.显然,不可压缩流体也可以等价地定义为速度的散度处处为零.

旋度定义为

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{V} = \det \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$= 2\varepsilon_x \boldsymbol{e}_x + 2\varepsilon_y \boldsymbol{e}_y + 2\varepsilon_z \boldsymbol{e}_z.$$

如果旋度处处为0,流动称为无旋运动;如果不是处处为0,则称为有旋运动.

在无旋运动假设下,有

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z = 0,$$

即速度满足如下柯西-黎曼关系式

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

根据全微分存在定理,存在 ϕ,使得 $\mathrm{d}\phi = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y + w\mathrm{d}z$.称 ϕ 为速度位(位函数、势函数).由 $\mathrm{d}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathrm{d}z$ 得

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

对于二维问题,$\phi = \mathrm{const}$ 定义的曲线称为等位线;对于三维问题,$\phi = \mathrm{const}$ 定义的曲面称为等位面.显然,$\nabla \cdot \phi$ 与速度平行,所以等位面必与流线正交.

考虑二维不可压缩流体.对于不可压缩流体,速度散度为零,即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{1.3}$$

如果流体无旋,即存在位函数 ϕ,使得:$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$.代入(1.3)得位函数所满足的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

除了用位函数描述流动外,还可以用所谓的流函数描述二维不可压缩流动[①].为了引进流函数概念,先考察穿越直线段(在垂直于二维平面的方向取单位长度)

① 下面有关流函数的定义不能推广到三维流动和可压缩流动.

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y$$

的流量

$$\mathrm{d}\psi = u\mathrm{d}y - v\mathrm{d}x.$$

记

$$\mathrm{d}\psi = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y, \quad A = -v, \quad B = u.$$

下面看 $\mathrm{d}\psi$ 是否为全微分,即是否有下面的柯西-黎曼条件

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

上式等价于

$$\frac{\partial(-v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

这便是散度为零的条件,等价于不可压缩流动的定义.

因此,在不可压假设下,表达式

$$\mathrm{d}\psi = u\mathrm{d}y - u\mathrm{d}x,$$

确实定义了一全微分,即存在函数 ψ,满足

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \frac{\partial \psi}{\partial y} = u.$$

如果取 ψ 为常数,即 $\mathrm{d}\psi=0$,则有

$$u\mathrm{d}y - v\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \frac{u}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{\mathrm{d}y},$$

即 ψ 为常数的线为流线.

因此,称由

$$\psi = \int u\mathrm{d}y - v\mathrm{d}x, u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad .$$

定义的 ψ 为流函数.

将 $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$代入旋度为零的条件

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

得无旋流场中 ψ 所满足的方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

因此,流函数也满足拉普拉斯方程.另外由

$$\nabla \phi \cdot \nabla \psi = (u, v) \cdot (-v, u) = 0,$$

所以流线和等位线是正交的.

采用流函数的好处在于,一旦获得流函数,那么由流函数等于常数就直接确定了流线.给定速度场后,可以用成熟的商业软件画流线.但千万要注意,某些画流线的软件基于

流函数概念.而流函数是针对二维不可压缩流动定义的.这类基于流函数的软件不能随意用来画三维流动某个横截面或者二维可压缩流动的流线.读者在使用商业软件时必须先确认软件的适应范围.

1.1.6　旋涡运动学

在分析流体微团的变形时,已经知道速度梯度张量$\nabla \boldsymbol{V}$可以分解为表示纯变形的部分$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{V}+\nabla \boldsymbol{V}^t)$(对称张量)和表示旋转运动的部分$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{V}-\nabla \boldsymbol{V}^t)$(反对称张量).由于二阶反对称张量只有三个独立分量,所以必然与某矢量形成一一对应关系.根据速度分解定理中反对称矩阵$\boldsymbol{Q}^t$的表达式,$\boldsymbol{A}$必与旋度$\boldsymbol{\omega}$成一一对应关系.可以验证:

$$A_{jk}=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_i,\quad \boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}.$$

这里$\boldsymbol{\varepsilon}=\{\epsilon_{ijk}=\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)\}$为置换张量.

因此可以用旋度来唯一表示流体维团的旋转运动.为了明确$\boldsymbol{\omega}$的物理意义,考虑刚体在空间的一般运动.由理论力学知道,对于速度为$\boldsymbol{V}_0$的任意基准点,矢径为$\boldsymbol{x}$处质点的速度为

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_0+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x}.$$

这里$\boldsymbol{\Omega}$为刚体的瞬时角速度矢量(最多是时间的函数).对上式取旋度运算得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}&=\nabla\times\boldsymbol{V}=\nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})\\&=\boldsymbol{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\boldsymbol{x}\\&=3\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}=2\boldsymbol{\Omega},\end{aligned}$$

因此,

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{V}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}.$$

即$\boldsymbol{\omega}$等价于于刚体运动中的角速度向量的两倍.因此可以称流体微团的旋转运动为准刚体运动.

过流场中任一点有一条曲线,该曲线上任一点与旋度矢量方向相切,这种线称为涡线.描述涡线的方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\omega_x}=\frac{\mathrm{d}y}{\omega_y}=\frac{\mathrm{d}z}{\omega_z}.\tag{1.4}$$

由定义可知,涡线上任一点的流体微团绕涡线的切线方向旋转.

在旋涡场取一非涡线的曲线C,过该曲线的任意点做涡线,这些涡线组成的曲面称为涡面.

在旋涡场取一非涡线的封闭曲线C,过该曲线的任意点做涡线,这些涡线组成的管状曲面称为涡管.称该涡管由闭曲线C张成的涡管.

如果涡管截面积无限小,则称该涡管为涡管元;如果一涡管的外面流场的旋度均0,则该涡管称为孤立涡管.

流场中如果至少存在一部分区域使得$\boldsymbol{\omega}\neq 0$,则流体运动称为有旋运动;如果在整个

区域中有 $\boldsymbol{\omega}=0$，则称流体运动为无旋运动.

根据所考察的流体团的几何尺度的不同，有旋运动存在两种不同的力学意义.

如果考虑宏观上无限小，微观上无限大的流体微团，则 $\boldsymbol{\omega}$ 完整地表示了旋转运动，因此 $\boldsymbol{\omega}$ 也称为涡量(vorticity)，它是表示流体微团旋转状态的量. 因 $\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V})=0$，所以涡量场是管式场. 特别注意的是，$\boldsymbol{\omega}\neq0$ 并不表示流体质点在做宏观上的旋转运动. 例如，对于剪切流动 $u=y, v=w=0$，有 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{e}_3\neq0$，即旋度不为 0. 但流体质点是在做水平直线运动. 反过来，如果流体质点做整体旋转运动，并不表示一定有 $\boldsymbol{\omega}\neq0$. 例如，在柱坐标系 (r,θ,z) 中考虑速度场 $V_r=0, V_\theta=\frac{1}{r}, V_z=0$. 此时对所有 $r\neq0$，

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{V}=\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\right)\boldsymbol{e}_z=0,$$

而该速度场明显表示流体质点在做围绕原点的整体旋转运动. 因此涡量反映的是局部运动，而非整体运动.

如果考虑有限大小的几何尺度的流体团，涡是一种具有强烈旋转倾向的有限质量流体的集合，往往是一种有组织的流体结构，此时这种结构称为有限大小的涡(vortex)，简称涡. 它可以理解为涡量高度集中的区域，如涡管、涡丝. 上面考虑的第二个例子就是这样一种涡，涡量集中在原点. 自然界中的龙卷风、船只航行时或摇动桨叶时水面出现的涡旋、烟圈、浴盆放水时空气柱体周围的旋转流动等都是这种涡的例子.

对于某些流动，存在各种尺度的涡，它们相互叠加在一起并进行相互作用，使得流场从某种观察角度看表现出强烈的无序性. 例如，烟囱冒出的烟在靠近烟囱口是直的，离开一段距离后便出现摇摆，最终散乱开，观察者看来运动表现出极其不规则.

涡的研究具有重要工程意义. 例如汽车在行驶时，尾部会拖出涡来(路面尘土较厚时很明显)，这种涡增加汽车所受的空气阻力，造成不必要的能耗，因此需要控制涡的出现. 飞机也有类似情况. 有时涡运动又能产生正面作用，最常见的例子就是洗衣机，利用旋转运动使脏物快速与水混合以达到洗净衣服之目的.

取空间任意截面，截面积为 A. 定义 $I=\int_A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A$ 为通过 A 的涡通量. 若 A 为涡管上的截面，则涡通量也称涡管强度.

设 C 为封闭曲线，线积分 $\Gamma_C=\int_C\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 称为速度环量. 这里，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 为封闭曲线的弧元素矢量.

设空间中有任意有界曲面 A，曲面足够光滑. 曲面的边界线为 C. 由曲面有界的假设，边界线 C 必为封闭曲线. 称曲面 A 为由曲线 C 张成的曲面，显然任意封闭曲线 C 可以张成无数个曲面. 如果曲面 A 是单连通的，那么 C 为一条封闭曲线；如果 A 是双连通的，那么 C 为两条封闭曲线. 因此这里考虑的封闭曲线可以是几条独立的封闭曲线的集合. 对任意矢量 $\boldsymbol{R}$ 成立下面的斯托克斯定理.

$$\int_C\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_A(\nabla\times\boldsymbol{R})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A.$$

速度环量定理　沿封闭曲线 C 的速度环量等于张在该曲线上任意涡管的涡通量(直接由斯托克斯定理得到)，因此，速度环量与涡通量之间是紧密联系的，二者都可用来衡量

旋涡强度.由于速度环量只用到线积分和速度本身(无微分),所以在一般情况下用速度环量研究旋涡运动更方便.

旋涡运动学性质 1(涡通量守恒定理) 在任意时刻,涡管中任意截面的涡通量与该截面的位置无关.

证明思路是这样的:在涡管上取任意两个横截面 A 和 B,横截面 A 和 B 的边界曲线为 C_1 和 C_2.考虑两截面 A 和 B 所界定的涡管壁 S(其边界由闭曲线 C_1 和 C_2 组成),在该管壁上使用斯托克斯定理.由于在涡管上旋度与管壁外法线垂直,所以 $\int_S \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=0$.于是有 $\int_{C_1}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}-\int_{C_2}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$,而 $\int_{C_1}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 与 $\int_{C_2}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 恰好等于两个截面上的涡通量,所以任意两个截面上的涡通量相等.

旋涡运动学性质 2 涡线与涡管不能在流体中产生或消失,只能在流体边界(含自由边界、无限远)上中断或形成闭合环.

涡管只可能在两种情形下产生或消失:一是涡管的截面积在流体中趋于 0,此时涡管强度必趋于无限大,这是不可能的;另一种情形是涡管或涡线在流体内部突然中断.设中断面为 S,在中断面邻域取两个面 A 与 B,大小与 S 相等,一个在涡管内,一个在涡管外.按性质 1 类似的方法,可知通过 A 的涡通量与通过 B 的涡通量必然相等,也就是说涡管终止于 S 处不可能.

1.2 流体动力学基本方程

1.2.1 应力张量的本构方程

1.2.1.1 应力张量与应变率张量

本构关系研究的是流体微团表面力(面积力)与流体微团的变形运动之间的关系,即(表面)应力 $\boldsymbol{P}$ 与应变率 $\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{V}+\nabla\boldsymbol{V}^{\mathrm{t}})=(s_{ij})$ 之间的关系.

考虑一直角四面体流体微团(图 1.5),四面体的三个面 $\delta A_1,\delta A_2,\delta A_3$ 分别与直角坐标系(x_1,x_2,x_3)的三个坐标面重合,从而它们的外法线方向分别为 $-\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_2,-\boldsymbol{e}_3$.第四个面 δA_n 外法线方向为 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$.各面上的面积力强度(单位面积上的力)分别为 $\boldsymbol{P}_{-e_1},\boldsymbol{P}_{-e_2},\boldsymbol{P}_{-e_3},\boldsymbol{P}_n$.根据作用力与反作用力定律,有

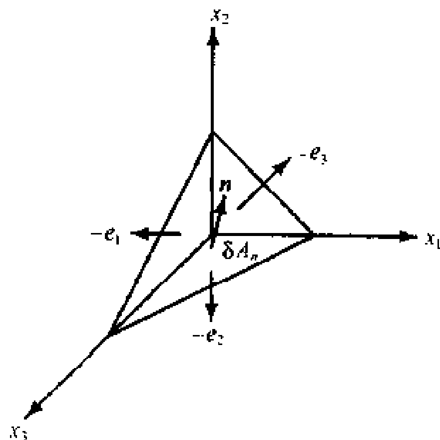


图 1.5 直角四面体流体微团的应力分析

$$\boldsymbol{P}_{-e_1}=-\boldsymbol{P}_{e_1},$$

$$\boldsymbol{P}_{-e_2} = -\boldsymbol{P}_{e_2},$$
$$\boldsymbol{P}_{-e_3} = -\boldsymbol{P}_{e_3},$$
$$\boldsymbol{P}_{-n} = -\boldsymbol{P}_{n}.$$

设流体微团体积为 $\delta\Omega$，微团加速度为 $\boldsymbol{\alpha}$，流体密度为 ρ，则根据牛顿定律，有

$$\rho\delta\Omega\boldsymbol{\alpha} = \rho\delta\Omega\boldsymbol{f} + \boldsymbol{P}_n\delta A_n + \boldsymbol{P}_{-e_i}\delta A_i.$$

这里 $\rho\delta\Omega\boldsymbol{f}$ 为流体微团所受的体积力．利用明显关系式

$$n_i = \frac{\delta A_i}{\delta A_n}, \lim_{\delta A_n \to 0}\frac{\delta\Omega}{\delta A_n} = 0,$$

牛顿定律可以简化为

$$\boldsymbol{P}_n = -\boldsymbol{P}_{-e_i}n_i = \boldsymbol{P}_{e_i}n_i.$$

将力矢量做分解

$$\boldsymbol{P}_{e_i} = P_{ij}\boldsymbol{e}_j,$$

得力平衡关系式

$$\boldsymbol{P}_n = P_{ij}n_i\boldsymbol{e}_j.$$

因此，由

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = P_n,$$

可以定义张量 $\boldsymbol{P}$，称为应力张量，其分量为 $\boldsymbol{P}_{ij}$．有了应力张量，那么方向为 $\boldsymbol{n}$ 的任意面上的力可以按 $\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$ 确定．因此一般情况下面积力与面积的方向有关．很容易证明，应力张量是对称张量，因而只有六个独立分量．对于某些特殊流体，有一些特殊力在起作用，从而应力张量不对称．这里不考虑这种情况．对称性可以通过构造角动量守恒方程证明，也可以用反证法．例如考虑正立方体微元，各边分别与某坐标轴平行．假定 $P_{12} \neq \boldsymbol{P}_{21}$，则绕 z 轴的力矩平衡得不到满足．

1.2.1.2 简单实验观察

以气体为例，实验观察到，一般气体中是存在压力的，它与密度和温度成正比关系，压力即是一种应力（表面力），与所考虑的表面垂直面且大小与方向无关．也可以从分子运动论来阐述压力的存在（即气体分子相互碰撞的宏观表现）．如果上下两层气体作相对滑动，即存在剪切变形时，则因微观上的分子运动，使得运动快的那层（设上层）气体部分分子跑到慢的那层（下层）气体里，把更高的动能带入下层，再经进一步分子碰撞使得下层气体运动加快．同理下层也使上层运动变慢．这种相互抵抗一直持续到出现某种平衡为止，宏观上表现为某种剪切力，阻止两层气体的无限变形．显然这种抵抗力与变形率大小有关，变形率越大，抵抗力就越大，这样才能阻止变形．因此剪切应力与剪切变形率之间存在一定的关系，流体的这种性质称为黏性．液体中也因分子之间的吸附作用存在上述类似性质．

牛顿在 1687 年通过实验建立了切向应力和剪切变形率之间的关系，他用相互平行的分别处于 $y=0$ 和 $y=h$ 的两块长（可以近似认为无限长）平板之间的流动做实验，下平板

固定不动,上平板以速度 U 向右运动(图1.6).实验发现,速度分布规律为

$$u(y) = U\frac{y}{h}.$$

实验表明,必须在上平板与运动相同的方向上施加一个切向力 F,以抵消流体作用在上平板上的黏性力.单位面积的切向力满足如下关系式

$$\tau = \mu\frac{U}{h}.$$

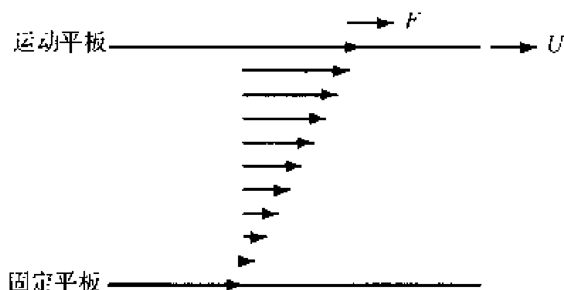


图 1.6　牛顿实验装置

由于$\frac{U}{h}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$,所以上式可以写成

$$\tau = \mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}.$$

这里 τ 为切应力,$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$为剪切变形率,$\mu$ 只是与流体物理特性有关的常数,称为动力学黏性系数,简称黏性系数,单位为 kg/m.s.有时也用运动黏性系数 $v=\mu/\rho$,单位为 m^2/s.

在常温下,空气的黏性系数为 $\mu=1.85\times10^{-5}$kg/m.s,水的黏性系数为 $\mu=10^{-4}$kg/m·s.黏性系数与压力基本无关,但与温度的关系十分密切.

对于气体,黏性系数随温度增加而增加,这是因为气体黏性作用是由于分子运动(分子扩散)引起的,温度增加,分子运动加快,黏性作用就越大.

对于液体,黏性系数随温度增加而减小,这是因为液体黏性主要是由于分子之间的吸附力引起的,温度增加,吸附力减弱,黏性作用就越小.

气体的黏性系数与温度的关系可以从分子运动论导出.对于空气,存在如下的 Sutherland 公式

$$\mu(T) = \mathrm{const}\frac{T^{\frac{3}{2}}}{T+C}, C\approx110.4\mathrm{K}.$$

上述公式对于 $T<2000$K 是基本成立的.

1.2.1.3　构造本构方程的基本原则

上面的牛顿公式是从简单剪切流动获得的,它表明黏性应力与应变率之间的关系,称为本构关系.对于更复杂的流动,有更一般的本构关系,需要从理性力学或其他方法导出.

根据理性力学原理,本构方程应该符合下述基本原则.

1)可表性原则.应力和应变率张量都是张量,所以本构方程也应该是张量方程.又知应力张量是对称张量,而应变率张量 $\boldsymbol{S}$ 也可以分解成对称 s_{ij} 与反对称 a_{ij} 两部分,因此应力张量只应该是 s_{ij} 的函数.

2)客观性原则.本构方程反映的是流体的物理特性,因此必须与坐标系无关,即不同观察者得到的本构方程必须相同.

记 $x' = x'_i e'_i$，$x = x_i e_i$. 考虑直角坐标系，当 e'_i 相对 e_i 作转动时，坐标基之间有关系式

$$e_i = \alpha_{ji} e'_j,\ e'_i = \alpha_{ij} e_j.$$

由于 $\delta_{ij} = e_i \cdot e_j = \alpha_{li} e'_l \cdot e'_m \alpha_{mj} = \alpha_{li} \alpha_{mj} \delta_{lm} = \alpha_{li} \alpha_{lj}$，所以 $\alpha_{li}\alpha_{lj} = \delta_{ij}$. 同理 $\alpha_{im}\alpha_{jm} = \delta_{ij}$.

从解析几何知道，两坐标系中的位置向量 x 和 x' 有如下变换关系式

$$x_i = \alpha_{ji} x'_j,\ x'_i = \alpha_{ij} x_j.$$

考虑两个作相对运动的坐标系 x 和 x'，且满足关系式

$$x' = x_0(t) + Q(t) \cdot x. \tag{1.5}$$

这里 x_0 表示平动，Q 表示 x' 相对 x 的转动. 称 $Q = e'_i Q_{ij} e_j$ 为坐标架的转动张量. 有 $Q_{ij} = \alpha_{ij}$，$Q_{li}Q_{lj} = \delta_{ij}$，$Q_{im}Q_{jm} = \delta_{ij}$. 特别强调的是，这里的坐标系 x' 属于一般的非惯性坐标系.

A)称标量 ϕ 满足客观性原则，如果在变换(1.5)下成立：

$$\phi'(x', t) = \phi(x, t). \tag{1.6}$$

B)称矢量 A 满足客观性原则，如果在变换(1.5)下成立：

$$A'(x', t) = Q \cdot A(x, t),\ A'_i(x', t) = Q_{ij} A_j(x, t). \tag{1.7}$$

C)称张量 P 满足客观性原则，如果在变换(1.5)下成立：

$$P'(x', t) = Q \cdot P(x, t) \cdot Q^t,\ P'_{ij}(x', t) = Q_{il} P_{lm}(x, t) Q_{jm}. \tag{1.8}$$

关系式(1.6)至(1.8)对于静止坐标变换是本来成立的，反映了标量、矢量和张量在静止坐标变换下的不变性，属于标量、矢量和张量的基本定义. 客观性原则进一步要求，所考虑的标量、矢量和张量的这些不变性对运动坐标变换也是成立的，也就是说，构造本构关系所使用的标量、矢量和张量在运动坐标变换(1.5)下，也要满足不变性条件(客观性原则)(1.6)至(1.8).

另外根据本构关系必须是张量关系式，所以也应该满足不变性条件(1.8).

假设剪切应力张量 τ_{ij} 满足关系式

$$\tau_{ij} = f_{ij}(\phi, A_l, P_{mn}, \cdots),$$

这里 f_{ij} 为二阶张量，ϕ 为标量，A_l 为矢量，P_{mn} 为二阶张量. 在运动参照系中，本构关系具有形式

$$\tau'_{ij} = f_{ij}(\phi', A'_l, P'_{mn}, \cdots).$$

根据客观性要求，ϕ 必须满足(1.6)，A_l 必须满足(1.7)，P_{mn}，f_{ij} 和 τ_{ij} 必须满足(1.8).

流体的物性参数如黏性系数属于标量，满足客观性要求(1.6).

流体的速度矢量 V_l 却不满足(1.7)，因此不能单独在本构关系式中出现. 原来

$$V'_i = \frac{\mathrm{d}x'_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x'_{0i}(t)}{\mathrm{d}t} + Q_{ij}(t)\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}Q_{ij}}{\mathrm{d}t}x_j = V_{0i}(t) + Q_{ij}V_j + \frac{\mathrm{d}Q_{ij}}{\mathrm{d}t}x_j,$$

因 V_{0i} 和 $\frac{\mathrm{d}Q_{ij}}{\mathrm{d}t}x_j$ 对于运动坐标系不恒为零，所以关系式(1.7)不满足.

已经知道，应变率张量 s_{ij} 满足可表性原则，即 $s'_{ij} = Q_{ik}s_{kl}Q_{jl}$，因此它满足客观性原则，可以出现在本构关系中. 事实上，由

$$V'_i = V_{0i}(t) + Q_{ik}V_k + \frac{\mathrm{d}Q_{ik}}{\mathrm{d}t}x_k,$$

得

$$\frac{\partial V_i'}{\partial x_j'} = Q_{ik}\frac{\partial V_k}{\partial x_j'} + \frac{\mathrm{d}Q_{ik}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_k}{\partial x_j'}$$

$$= Q_{ik}\frac{\partial V_k}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial x_j'} + \frac{\mathrm{d}Q_{ik}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_k}{\partial x_j'}$$

$$= Q_{ik}\frac{\partial V_k}{\partial x_l}Q_{jl} + \frac{\mathrm{d}Q_{ik}}{\mathrm{d}t}Q_{jk},$$

$$\frac{\partial V_j'}{\partial x_i'} = Q_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_k}Q_{jl} + \frac{\mathrm{d}Q_{jk}}{\mathrm{d}t}Q_{ik},$$

所以有

$$s_{ij}' = Q_{ik}s_{kl}Q_{jl} + \frac{\mathrm{d}Q_{ik}}{\mathrm{d}t}Q_{jk} + \frac{\mathrm{d}Q_{jk}}{\mathrm{d}t}Q_{ik} = Q_{ik}s_{kl}Q_{jl} + \frac{\mathrm{d}Q_{ik}Q_{jk}}{\mathrm{d}t}$$

$$= Q_{ik}s_{kl}Q_{jl} + \frac{\mathrm{d}\delta_{ij}}{\mathrm{d}t} = Q_{ik}s_{kl}Q_{jl}.$$

如果令 f_{ij} 为标量函数，则显然

$$\tau_{ij} = f(\mu, s_{ij})$$

满足客观性原则.

1.2.1.4　牛顿型流体的本构关系

有了可表性原则和客观性原则，便可大大减小构造本构关系的盲目性.但这些原则还不能用以给出本构关系的具体表达式，还必须补充实验与假设条件.最常见的流体是牛顿型流体，它是一种相对简单的非记忆性流体.

1.基本假设的分解与本构关系的导出

牛顿型流体的定义可以分解为如下几个基本假设：

1)运动流体的应力张量在运动停止后应趋于静止流体的应力张量 $-p\delta_{ij}$(p 为热力学压强).为此将应力张量 P_{ij}分解为 $-p\delta_{ij}$和 τ_{ij}两部分，即

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}.$$

这里 τ_{ij}为偏应力张量，运动停止时 $\tau_{ij}\equiv 0$.偏应力张量也为对称张量.

2)偏应力张量 τ_{ij}的各分量是局部速度梯度张量$\frac{\partial V_k}{\partial x_l}$的线性齐次函数

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}\frac{\partial V_k}{\partial x_l}.$$

这里 c_{ijkl}表示流体黏性，是常数.例如，当$\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\neq 0$，而其他$\frac{\partial V_k}{\partial x_l}=0$ 时，$c_{1212}=\mu$(黏性系数).由于$\frac{\partial V_k}{\partial x_l}=s_{kl}+a_{kl}$，其中应变率张量 s_{kl}为对称张量，而旋转运动张量 a_{kl}为反对称张量.由于 τ_{ij}是对称张量，所以必有 $c_{ijkl}a_{kl}=0$，从而

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} s_{kl}.$$

3)流体是各向同性的,即流体的性质不依赖于方向和坐标系的转换.因此 c_{ijkl} 必然是四阶各向同性张量,其每一分量在旋转坐标变换下不变,即

$$c'_{ijkl} = c_{ijkl}.$$

各向同性张量的特点是,将 c_{ijkl} 的各下标值作递增值相同的循环置换(如对 c_{1234},作 $1\to2,2\to3,3\to4,4\to1$,得 c_{2341}),得另一分量,此分量值与原分量值相同,如 $c_{2341}=c_{1234}$,$c_{4123}=c_{3412}$. 由此不难证明,四阶各向同性张量可以表示为

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \alpha\delta_{ik}\delta_{jl} + \beta\delta_{il}\delta_{jk},$$

其中 λ,α,β 均为标量. 因此,四阶各向同性张量只有三个独立分量.

将下标 i,j 对调得

$$c_{jikl} = \lambda\delta_{ji}\delta_{kl} + \alpha\delta_{jk}\delta_{il} + \beta\delta_{jl}\delta_{ik},$$

因此有

$$c_{jikl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \alpha\delta_{il}\delta_{jk}.$$

由于 τ_{ij},s_{ij} 都是对称张量,所以 c_{ijkl} 必然关于 i,j 对称,即 $c_{ijkl}=c_{jikl}$. 于是

$$c_{ijkl} = \frac{1}{2}(c_{ijkl} + c_{jikl}) = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

这里 $\mu=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

于是 $\tau_{ij}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}s_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})s_{kl}$,即

$$\tau_{ij} = \lambda s_{kk}\delta_{ij} + 2\mu s_{ij}.$$

因此牛顿流体应力张量的表达式为

$$P_{ij} = (-p + \lambda s_{kk})\delta_{ij} + 2\mu s_{ij}. \tag{1.9}$$

如果记

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu,$$

上式也可以写成

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(s_{ij} - \frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right) + \mu' s_{kk}\delta_{ij}. \tag{1.10}$$

这就是广义牛顿定律,也称为牛顿流体的本构方程.

2. 系数 μ,μ' 的物理意义

考虑简单剪切运动 $u=u(y)$,$v=w=0$. 此时本构方程退化为

$$P_{12} = \mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y},$$

因此 μ 为前面提到的黏性系数.

考虑以点 M 为中心以 $r\to0$ 为半径的无限小球面 S 上法应力 $\boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$ 的平均值(对所有方向进行平均)

$$
\begin{aligned}
\overline{P} &= \frac{1}{4\pi r^2}\int_S \boldsymbol{P}_n \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi r^2}\int_S \boldsymbol{P}_{ij}n_in_j\mathrm{d}S \\
&\overset{r\to 0}{=} \frac{\boldsymbol{P}_{ij}}{4\pi r^2}\int_S n_in_j\mathrm{d}S \\
&= \frac{P_{ij}}{4\pi r^2}\oint_S \frac{x_i}{r}n_j\mathrm{d}S = \frac{P_{ij}}{4\pi r^3}\oint_S x_in_j\mathrm{d}S \\
&= \frac{P_{ij}}{4\pi r^3}\oint_S x_j\delta_{ij}n_j\mathrm{d}S = \frac{P_{ij}}{4\pi r^3}\oint_S x_k\delta_{ik}n_k\delta_{kj}\mathrm{d}S \\
&= \frac{\boldsymbol{P}_{ij}}{4\pi r^3}\oint_S (\delta_{ik}\delta_{kj}x_k)n_k\mathrm{d}S \\
&= \frac{P_{ij}}{4\pi r^3}\int_V \frac{\partial(\delta_{ik}\delta_{kj}x_k)}{\partial x_k}\mathrm{d}V \\
&= \frac{P_{ij}}{4\pi r^3}\int_V \delta_{ik}\delta_{jk}\mathrm{d}V \\
&= \frac{1}{3}P_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \frac{1}{3}(P_{11}+P_{22}+P_{33}),
\end{aligned}
$$

这里，$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 为球的体积. 因此 M 点处所有方向上的法应力平均值等于 x_1,x_2,x_3 三个方向上的法应力平均值，是一个不随坐标变化的量. 进一步将广义牛顿定律代入上式得

$$\overline{P} = -p + \mu'\nabla \cdot \boldsymbol{V}.$$

如果 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$，则由上式得 $\overline{P}=-p$，即不可压缩流体一点的法应力平均值等于其热力学压强.

如果 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$，那么上式表明，流体微团在运动过程中发生体积变化引起平均正应力值发生 $\mu'\nabla\cdot\boldsymbol{V}$ 的变化，因此也称 μ' 膨胀黏性系数或第二黏性系数. 它反映了气体因膨胀或收缩发生体积变化时，从一个状态过渡到另一个状态所对应的不可逆(非平衡)过程引起的内耗. 失去平衡后再恢复到新的平衡所需要的时间(弛豫时间)如果比宏观运动状态改变所需时间短许多，则可以忽略第二黏性系数. 事实上，除高温和高频声波等极端情况外，对于一般气体分子运动可取第二黏性系数为 0. 早期斯托克斯假设 $\mu'=0$，因此习惯上称 $\mu'=0$ 为斯托克斯假设. 在斯托克斯假设下，本构方程中的压力就是平均正应力，它与热力学中的压力具有不同含义，不能证明它们相等. 但实际计算表明，在斯托克斯假设下，可以认为本构关系中的压力等于热力学压力.

在斯托克斯假设下，广义牛顿定律可以写成

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(s_{ij} - \frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right). \tag{1.11}$$

3. 本构关系在不同坐标系中的表达式

为了求得应力张量在各坐标系中的分量形式，将本构关系写成矢量形式

$$\boldsymbol{P} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\left(\boldsymbol{S} - \frac{1}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{V}\boldsymbol{I}\right) + \mu'\nabla\cdot\boldsymbol{V}\boldsymbol{I},$$

这里 $\boldsymbol{I}$ 为单位张量，然后将矢量形式针对所考虑的坐标系进行分量分解. 先求 $\nabla\boldsymbol{V}$，再取

转置得$(\nabla \boldsymbol{V})^t$.

在直角坐标系下,有关系式

$$\boldsymbol{V} = V_x\boldsymbol{e}_x + V_y\boldsymbol{e}_y + V_z\boldsymbol{e}_z;$$

$$s_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x}, s_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y}, s_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z};$$

$$s_{xy} = s_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right);$$

$$s_{yz} = s_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right);$$

$$s_{zx} = s_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right).$$

因此应力各分量的表达式为

$$P_{xx} = -p + 2\mu s_{xx} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)(s_{xx} + s_{yy} + s_{zz});$$

$$P_{yy} = -p + 2\mu s_{yy} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)(s_{xx} + s_{yy} + s_{zz});$$

$$P_{zz} = -p + 2\mu s_{zz} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)(s_{xx} + s_{yy} + s_{zz});$$

$$P_{xy} = P_{yx} = 2\mu s_{xy};$$

$$P_{yz} = P_{zy} = 2\mu s_{yz};$$

$$P_{zx} = P_{xz} = 2\mu s_{zx}.$$

在柱坐标系下,有关系式

$$\boldsymbol{V} = V_r\boldsymbol{e}_r + V_\theta\boldsymbol{e}_\theta + V_z\boldsymbol{e}_z;$$

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} = 0, \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = 0, \frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial r} = 0;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta, \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r, \frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial \theta} = 0;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial z} = 0, \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial z} = 0, \frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial z} = 0.$$

和

$$s_{rr} = \frac{\partial V_r}{\partial r}, s_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r}, s_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z};$$

$$s_{r\theta} = s_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\frac{V_\theta}{r}\right);$$

$$s_{\theta z} = s_{z\theta} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial z}\frac{V_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}\right);$$

$$s_{zr} = s_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z}\right).$$

因此应力各分量的表达式为

$$P_{rr} = -p + 2\mu s_{rr} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)(s_{rr} + s_{\theta\theta} + s_{zz});$$

$$P_{\theta\theta} = -p + 2\mu s_{\theta\theta} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)(s_{rr} + s_{\theta\theta} + s_{zz});$$

$$P_{zz} = -p + 2\mu s_{zz} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)(s_{rr} + s_{\theta\theta} + s_{zz});$$

$$P_{r\theta} = P_{\theta r} = 2\mu s_{r\theta};$$

$$P_{\theta z} = P_{z\theta} = 2\mu s_{\theta z};$$

$$P_{zr} = P_{rz} = 2\mu s_{zr}.$$

1.2.2　流体动力学的积分型方程

1.2.2.1　基本原理

在流场中选定具有代表性的一个静止或运动的体积(称为有限体或有限体积,也称为控制体),针对该体积构造反映质量、动量与能量守恒的流体力学基本积分型方程,这就是构造流体力学基本方程的基本原理.

主要考虑两种类型的有限体:静止几何体(简称几何体)与运动物质体(简称物质体).这种称呼完全是人为的,不同书上可以有不同的称呼.有限体的这种分类只是本节内容介绍上的需要,不代表最基本的概念.它们之间的区别类似于前面的欧拉法与拉格朗日方法的区别.

几何体是相对于某参照坐标系不随时间变化的封闭曲面 Σ 所包含的区域 Ω,如发动机中的气缸、进气道等.几何体属于开放系统,几何外形与体积不变,其边界上可以有质量交换,有力的相互作用和能量交换.

物质体是流体中封闭流体(物质)面 $\Sigma^*(t)$ 所包含的流体,如液滴、气泡等,物质体所占据的几何区域 Ω^* 是随时间变化的.物质体属于封闭系统,随流体质点一起运动(从而边界速度等于流体速度),其边界上没有质量交换,但有力的相互作用和能量交换.

流体力学主要有三个基本方程:

(1)质量守恒方程.它反映的是物质不生不灭这一最自然的物理定律.它用以描述流体密度 ρ 的变化规律.它不需要补充任何其他关系式,也就是说,质量守恒方程是物质不生不灭的最直观的体现,方程的形式十分简单.质量守恒方程也称连续性方程.

(2)动量守恒方程.它反映的是牛顿定律,即物体在力的作用下做加速运动.具体说,物质体所受的合力等于其质量与加速度的积,也可以理解为流体微团所受的力等于其动量变化率.因此,只要能求出合力,便可以得到动量守恒方程.合力包括体积力 ρf 和面积力 $\boldsymbol{P}_n$.体积力可以是多相物质的相互作用力、远程力(如重力与电磁力)和惯性力,以后将逐步介绍.面积力主要是压力和黏性应力,这在前一节已经详细介绍了.

(3)能量守恒方程.能量守恒属于经典的热力学定律.流体微团单位质量的能量即总

能 $\boldsymbol{E}$ 包括内能 e 与动能 $\frac{1}{2}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}$. 合力所做的功、热传导(由化学反应等引起的)生成热都引起总能的变化. 功等于力矢量与速度矢量的点积. 热传导引起的热流密度 $\boldsymbol{q}$ 是一矢量,对于各向同性流体有如下的傅里叶定律

$$\boldsymbol{q} = -\kappa\nabla T.$$

这里 κ 为热传导系数. 因此,热传导是由温度不均匀引起的. 傅里叶定律表明,热量由温度高的地方传给温度低的地方,热流量正比于温度梯度. 沿方向 $\boldsymbol{n}$ 在单位时间通过单位面积的热量为

$$q_n = -\kappa\nabla T\cdot\boldsymbol{n} = -\kappa\frac{\partial T}{\partial n}.$$

生成热的产生在本书中不考虑(读者可以使用尽人皆知的软件 CHEMKIN).

通过某种线性的或非线性的组合,还可以导出一些组合量的方程. 这些组合量所满足的方程虽然不属于最基本的方程,但可以更直观地揭示一些特殊的物理现象.

1.2.2.2 有限体上积分的导数

考虑由流体质点组成的物质线 L^*、物质面 $\boldsymbol{\Sigma}^*$ 和物质体 Ω^*,往往需要以它们作为积分域来考虑某些物理量的变化. 如:

A)物质线上的速度环量 $\oint_{L^*}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}^*$;

B)物质面上的涡通量 $\int_{\Sigma^*}\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}^*$;

C)物质体上的质量 $\int_{\Omega^*}\rho\mathrm{d}\Omega^*$,动能 $\int_{\Omega^*}\rho\boldsymbol{V}\mathrm{d}\Omega^*$,总能 $\int_{\Omega^*}\rho E\mathrm{d}\Omega$,等等.

这些物质积分及其变化在构造积分型运动方程和研究旋涡动力学性质等方面具有重要应用价值.

物质积分随时间的变化率称为物质积分的随体导数. 这种变化显然来自两个方面:

A)物理量本身随时间的变化;

B)物质线、物质面或物质体的形状和大小随时间的变化.

先将物质线 L^*、物质面 Σ^* 和物质体 Ω^* 看成线段元 δL^*、面积元 $\delta\Sigma^*$ 和体积元 $\delta\Omega^*$ 的集合,先看线段元、面积元和体积元的随体导数.

设 $\delta\boldsymbol{L}^*$ 为流体质点 $\boldsymbol{x}_\mathrm{A}$ 到其相邻质点 $\boldsymbol{x}_\mathrm{B}$ 的矢径,于是物质线元积分的随体导数为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\delta\boldsymbol{L}^* = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{x}_\mathrm{B}-\boldsymbol{x}_\mathrm{A}) = \boldsymbol{V}_\mathrm{B}-\boldsymbol{V}_\mathrm{A} = \delta\boldsymbol{V} = \nabla\boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{L}^*. \tag{1.12}$$

利用散度的定义得物质体积分的随体导数

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\delta\Omega^* = \delta\Omega^*\frac{1}{\delta\Omega^*}\frac{\mathrm{D}\Omega^*}{\mathrm{D}t} = \nabla\cdot\boldsymbol{V}\delta\Omega^*. \tag{1.13}$$

为了确定物质面积分的随体导数,我们利用物质线和物质体上的随体导数. 给定物质面 $\delta\boldsymbol{\Sigma}^*$,任选不与 $\delta\boldsymbol{\Sigma}^*$ 法向垂直的物质线 $\delta\boldsymbol{L}^*$ 为母线,组成体积为 $\delta\Omega^* = \delta\boldsymbol{L}^*\cdot\delta\boldsymbol{\Sigma}^*$ 的柱体(物质体),于是有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\delta\Omega^* = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\delta\boldsymbol{L}^* \cdot \delta\boldsymbol{\Sigma}^* + \delta\boldsymbol{L}^* \cdot \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{\Sigma}^*.$$

将(1.12)和(1.13)以及 $\delta\Omega^* = \delta\boldsymbol{L}^* \cdot \delta\boldsymbol{\Sigma}^*$ 代入上式并提出公因子 $\delta\boldsymbol{L}^*$,得

$$\delta\boldsymbol{L}^* \cdot \left[\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\delta\boldsymbol{\Sigma}^* + \nabla\boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{\Sigma}^* - (\nabla\cdot\boldsymbol{V})\delta\boldsymbol{\Sigma}^*\right] = 0.$$

因 $\delta\boldsymbol{L}^*$ 任意,所以必有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\delta\boldsymbol{\Sigma}^* = -\nabla\boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{\Sigma}^* + (\nabla\cdot\boldsymbol{V})\delta\boldsymbol{\Sigma}^*. \tag{1.14}$$

考虑物质积分 $\int_{\tau^*}\boldsymbol{\Phi} * \delta\boldsymbol{\tau}^*$ 的随体导数,这里 $\boldsymbol{\Phi}$ 可以是任意矢量和标量,$\delta\boldsymbol{\tau}^*$ 可以代表物质线元、物质面元和物质体元,乘号 $*$ 可以是任意合理的标量乘和矢量乘(包括点乘和叉乘).则有如下关系式

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\tau^*}\boldsymbol{\Phi} * \delta\boldsymbol{\tau}^* = \int_{\tau^*}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\boldsymbol{\Phi} * \delta\boldsymbol{\tau}^*) = \int_{\tau^*}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{D}t} * \delta\boldsymbol{\tau}^* + \int_{\tau^*}\boldsymbol{\Phi} * \frac{\mathrm{D}\delta\boldsymbol{\tau}^*}{\mathrm{D}t}.$$

利用关系式(1.12),(1.13)和(1.14),很容易求得如下随体导数:

A)速度环量的随体导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\oint_{L^*}\boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{L}^* &= \oint_{L^*}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}\cdot\delta\boldsymbol{L} + \oint_{L^*}\boldsymbol{V}\cdot\frac{D\delta\boldsymbol{L}^*}{Dt}\\ &= \oint_{L^*}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}\cdot\delta\boldsymbol{L}^* + \oint_{L^*}\boldsymbol{V}\cdot\delta\boldsymbol{V}\\ &= \oint\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}\cdot\delta\boldsymbol{L}^* + \oint_{L^*}\frac{1}{2}\delta V^2\\ &= \oint_{L^*}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}\cdot\delta\boldsymbol{L}^*.\end{aligned}$$

B)涡旋矢量物质积分的随体导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\boldsymbol{\Sigma}^*}\boldsymbol{\Omega}\cdot\delta\boldsymbol{\Sigma}^* &= \int_{\Sigma^*}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{D}t}\cdot\delta\boldsymbol{\Sigma}^* + \int_{\Sigma^*}\boldsymbol{\Omega}\cdot\frac{\mathrm{D}\delta\boldsymbol{\Sigma}^*}{\mathrm{D}t}\\ &= \int_{\Sigma^*}\left[\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{D}t} + (\nabla\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\cdot(\nabla\boldsymbol{V})\right]\cdot\delta\boldsymbol{\Sigma}^*.\end{aligned}$$

C)任意物理量的物质体积分的随体导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\Omega^*}\phi\delta\Omega^* &= \int_{\Omega^*}\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t}\delta\Omega^* + \int_{\Omega^*}\phi\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\delta\Omega^*\\ &= \int_{\Omega^*}\left(\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t} + \phi\nabla\cdot\boldsymbol{V}\right)\delta\Omega^*\\ &= \int_{\Omega^*}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{V})\right]\delta\Omega^*.\end{aligned}$$

几何体内某物理量 ϕ 总和随时间的增长率

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\phi\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega}\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}\Omega,$$

称为局部导数.

随体导数则为物质体内某物理量 ϕ 总和随时间的增长率.利用物质体积分随体导数

的定义

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\Omega^*(t)}\phi\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega^*}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{V})\right]\mathrm{d}\Omega^*,$$

和高斯定理得

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\Omega^*(t)}\phi\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega^*(t)}\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}\Omega + \oint_{\Sigma^*(t)}\phi\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma. \tag{1.15}$$

这里 $\oint_{\Sigma^*(t)}\phi\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma$ 是边界处因流体流动使物质体体积扩张所增加的量,称为控制面上的运输量.因此,随体导数等于局部导数加控制面上的运输量.

除了考虑上面的静止几何体和运动物质体外,有时也考虑任意运动控制体(简称为任意体)$\Omega(t)$,其边界 $\Sigma(t)$的运动速度为 $\boldsymbol{V}_\Sigma$.如果 $\boldsymbol{V}_\Sigma=0$,则任意体蜕化为静止几何体;如果 $\boldsymbol{V}_\Sigma=\boldsymbol{V}$,则任意体蜕化为物质体.任意体内某物理量 ϕ 的总和随时间的变化为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\Omega(t)}\phi\mathrm{d}\Omega &= \int_{\Omega(t)}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{V}_\Sigma)\right]\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega(t)}\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}\Omega + \oint_{\Sigma(t)}\phi\boldsymbol{V}_\Sigma\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma.\end{aligned}$$

原则上,利用静止几何体、物质体或任意体和力学、热力学定律,就可以构造积分型动力学方程.

1.2.2.3 物质体上的动力学方程

质量守恒方程:根据物质不生不灭定律,物质体内流体的质量保持不变,所以质量守恒方程为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\Omega^*(t)}\rho\mathrm{d}\Omega = 0.$$

动量守恒方程[①]:根据牛顿定律,物质体内动量增长率等于作用在物质体上的体积力和面上的表面力之和,所以动量守恒方程为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\Omega^*(t)}\rho\boldsymbol{V}\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega^*(t)}\rho\boldsymbol{f}_v\mathrm{d}\Omega + \oint_{\Sigma^*}\boldsymbol{P}_n\mathrm{d}\Sigma.$$

能量守恒方程:根据能量定律,物质体内总能量增长率等于作用在物质体上的体积力做功($\boldsymbol{f}_v\cdot\boldsymbol{V}$)、面上的表面力做功($\boldsymbol{P}_n\cdot\boldsymbol{V}$)、物质体内的生成热和边界面上因热传导输入的热量 $\kappa\nabla T$ 之和

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\Omega^*(t)}\rho E\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega^*(t)}\rho\boldsymbol{f}_v\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}\Omega + \oint_{\Sigma^*}\boldsymbol{P}_n\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}\Sigma$$

① 也可以建立动量矩守恒方程.由物质体内动量矩增长率等于作用在物质体上的体积力矩和面上的表面力力矩之和,得

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\Omega^*(t)}\rho\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega^*(t)}\rho\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}_v\mathrm{d}\Omega + \oint_{\Sigma^*}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}_n\mathrm{d}\Sigma.$$

$$+\int_{\Omega^*(t)}\rho\dot{q}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Sigma^*(t)}\kappa\nabla T\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma.$$

这里 $E=e+\frac{1}{2}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}$ 为总能(内能加动能)，$\dot{q}$ 为流体微团单位质量单位时间的生成热.

1.2.2.4 静止几何体和任意体上的动力学方程

利用随体导数定义(1.15)

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\Omega^*(t)}\phi\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega^*(t)}\frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Sigma^*(t)}\phi\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma,$$

并取 $\Sigma=\Sigma^*(t),\Omega=\Omega^*(t)$，便可将物质体上方程的随体导数转换为局部导数和边界运输量得几何体上的守恒方程.

质量守恒方程为

$$\int_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Sigma}\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma=0.$$

动量守恒方程为

$$\int_{\Omega}\frac{\partial(\rho\boldsymbol{V})}{\partial t}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Sigma}\rho\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma=\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{f}_v\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Sigma}\boldsymbol{P}_n\mathrm{d}\Sigma.$$

能量守恒方程为

$$\int_{\Omega}\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Sigma}\rho E\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma=\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{f}_v\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Sigma}\boldsymbol{P}_n\cdot\boldsymbol{V}\mathrm{d}\Sigma$$
$$+\int_{\Omega}\rho\dot{q}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Sigma}\kappa\nabla T\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma.$$

其实，上述方程也可以直接从几何体分析获得. 以质量守恒方程为例，几何体内的变化由两个原因引起：(1)通过表面流体流进流出，单位时间内流进的流体和流出的流体的总和为 $\int_{\Sigma}\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma$；(2)由于密度本身随时间的变化引起的质量增加 $\int_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\Omega$. 根据质量守恒原理，必有

$$\int_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Sigma}\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma=0.$$

守恒方程的各项均有明确的物理意义，以动量方程为例：

1)左端第一项代表控制体内动量变化率；

2)左端第二项为边界上因对流流动对上述变化的贡献；

3)右端第一项为体积力对上述变化的贡献；

4)右端第二项为面积力对上述变化的贡献.

也可以用类似方法构造任意体上的守恒方程. 所得的守恒方程为

$$\int_{\Omega(t)}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Sigma(t)}\rho(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}_{\Sigma})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma=0, \tag{1.16}$$

$$\int_{\Omega(t)}\frac{\partial(\rho\boldsymbol{V})}{\partial t}\mathrm{d}\Omega+\oint_{\Sigma(t)}\rho\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{V}_{\Sigma})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma$$

$$= \int_{\Omega(t)} \rho \boldsymbol{f}_v \mathrm{d}\Omega + \oint_{\Sigma(t)} \boldsymbol{P}_n \mathrm{d}\Sigma, \tag{1.17}$$

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} \mathrm{d}\Omega + \oint_{\Sigma(t)} \rho E(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}_\Sigma) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\Sigma = \int_{\Omega(t)} \rho \boldsymbol{f}_v \cdot \boldsymbol{V} \mathrm{d}\Omega + \oint_\Sigma \boldsymbol{P}_n \cdot \boldsymbol{V} \mathrm{d}\Sigma + \int_{\Omega(t)} \rho q \mathrm{d}\Omega + \oint_{\Sigma(t)} \kappa \nabla T \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\Sigma. \tag{1.18}$$

1.2.2.5 动量定理

流动参数所满足的基本方程是非线性的,一般情况下求解十分困难.但动量方程的积分形式在许多情况下能简单给出意想不到的好结果.

设固定在空间的区域为 Ω,区域的外边界为 Σ(外边界处一般忽略黏性力作用而只考虑压力).区域的内部可以包含另一个物体[①],设物体给流体的作用力为 $-\boldsymbol{F}_e$(包含压力和黏性力).于是积分形式的动量方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho \boldsymbol{V} \mathrm{d}\Omega + \int_\Sigma \rho \boldsymbol{V}(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}\Sigma = -\boldsymbol{F}_e - \int_\Sigma p \boldsymbol{n} \mathrm{d}S + \int_\Omega \boldsymbol{F}_v \mathrm{d}\Omega. \tag{1.19}$$

这里,

左边第一项表示区域 Ω 内动量的变化率,

第二项表示通过区域边界 Σ 的动量通量,

右边第一项为流体内物体给流体的作用力,

第二项为流体(外)边界上压力给流体的作用力,

最后一项为体积力给流体的作用力(在非惯性系中应该考虑惯性力).

在计算流体力学中,计算出空间流动参数分布后,利用动量定理将物体所受的气动力积分出来,精度要大大高于直接对物面受力(压力与黏性力)进行积分所得的合力.

1.2.3 流体动力学的微分型方程

前面介绍的积分型方程几乎总是成立的.本节介绍的微分型方程需要假定流动参数是可微的.

1.2.3.1 由积分方程导出微分方程

采用控制体上的积分方程,将所有面积分通过高斯定理化为体积分,由积分区域的任意性,被积函数必然与原积分满足同样的方程,由此便得相应的微分方程.

用高斯定理将面积分化成体积分后,任意控制体 Ω 上的积分方程可以写成

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V})\right] \mathrm{d}\Omega = 0,$$

---

① 如果该物体的部分或全部边界与正好与所选的控制体部分边界重合,那么积分边界Σ不包含重合部分.

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial \rho \boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{V})-\rho \boldsymbol{f}_v-\nabla\cdot(\boldsymbol{P})\right]\mathrm{d}\Omega=0,$$

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial \rho E}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V}E)-\rho \boldsymbol{f}_v\cdot\boldsymbol{V}-\nabla\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{V})-\rho q-\nabla\cdot(\kappa\nabla T)\right]\mathrm{d}\Omega=0.$$

由于积分区域的任意性,所以上面方程中左端被积函数必须恒等于零,由此得如下形式的微分方程(质量守恒方程、动量守恒方程、能量守恒方程)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V})=0, \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{V})=\rho \boldsymbol{f}_v+\nabla\cdot(\boldsymbol{P}), \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{V}E)=\rho \boldsymbol{f}_v\cdot\boldsymbol{V}+\nabla\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{V})+\rho q+\nabla\cdot(\kappa\nabla T). \tag{1.22}$$

质量守恒方程习惯上也称为连续性方程.

1.2.3.2　由流体微团分析导出微分方程

这里以连续性方程为例,说明推导它的其他两种方法.

第一种方法为拉格朗日方法.考虑物质体积元(流体微团)$\delta\Omega^*$,根据物质不生不灭原理和质点导数的定义,有

$$\frac{\mathrm{D}\rho\delta\Omega^*}{\mathrm{D}t}=0,$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}\delta\Omega^*+\rho\frac{\mathrm{D}\delta\Omega^*}{\mathrm{D}t}=0,$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\frac{1}{\delta\Omega^*}\frac{\mathrm{D}\delta\Omega^*}{\mathrm{D}t}=0,$$

$$\xRightarrow{\frac{1}{\delta\Omega^*}\frac{\mathrm{D}\delta\Omega^*}{\mathrm{D}t}=\nabla\cdot\boldsymbol{V}}\quad \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0.$$

将

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\rho,$$

代入上式得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0.$$

连续性方程可以写成

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{V}.$$

上式表明,质点密度的相对变化率,等于负的体积相对变化率.因此连续性方程充分反映了流体微团的密度变化是由体积变化引起的这一物理事实.

质点密度不变的流体称为不可压缩流体,即不可压缩流体的严格定义为

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=0.$$

由连续性方程知

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=0\Rightarrow\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0.$$

因此，不可压缩流体可以等价地定义为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0.$$

第二种方法为欧拉方法.在直角坐标系中取固定的长方体(图 1.7)，棱边 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 分别平行于 x,y,z 轴，中心坐标为 (x,y,z). 首先分析通过各表面单位时间流进流出的质量.

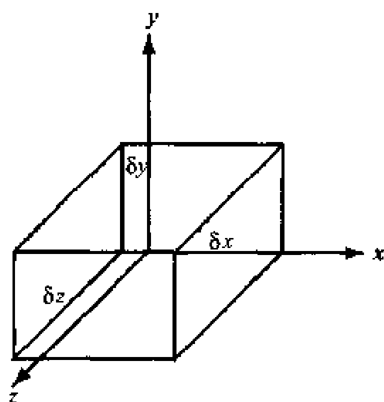


图 1.7　长方体几何体

先考虑 x 轴方向.单位时间通过位于 $x-\frac{1}{2}\mathrm{d}x$ 和 $x+\frac{1}{2}\mathrm{d}x$ 的两个表面流进和流出的质量分别为

$$\left(\rho u-\frac{1}{2}\mathrm{d}x\,\frac{\partial\rho u}{\partial x}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\left(\rho u+\frac{1}{2}\mathrm{d}x\,\frac{\partial\rho u}{\partial x}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

所以，在 x 轴方向，通过与该轴垂直的两个表面单位时间流出的净质量为

$$\frac{\partial\rho u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

同理，通过与 y 轴和 z 轴垂直的表面流出的净质量分别为

$$\frac{\partial\rho v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\frac{\partial\rho w}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

于是，通过各表面流出的总质量为

$$\left[\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由于密度随时间变化，长方体内单位时间流体质量的减少为

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

根据质量守恒原理，通过表面流出的质量等于长方体内质量的减少

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left[\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由此得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0.$$

1.2.3.3　Navier - Stokes 方程与 Euler 方程

将广义牛顿定律(1.11)代入(1.20)至(1.22)，便得如下的 Navier - Stokes(纳维-斯托克斯)方程(简称 N - S 方程)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0,\tag{1.23}$$

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{V}) = \rho \boldsymbol{f}_v - \nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}), \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V} E) = \rho \boldsymbol{f}_v \cdot \boldsymbol{V} - \nabla \cdot (p \boldsymbol{V}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{V}) + \rho q + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \tag{1.25}$$

对于牛顿流体,在斯托克斯假设下

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\left(\boldsymbol{S} - \frac{1}{3}\nabla \cdot \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{I}\right).$$

如果假设黏性系数为常数,便有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{S} - \frac{2\mu}{3}\nabla \cdot [(\nabla \cdot \boldsymbol{V})\boldsymbol{I}].$$

考虑到

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{S} &= \frac{1}{2}[\nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{V}) + \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{V})^t] \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i\right)^t \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\delta_{jk}\boldsymbol{e}_i\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\delta_{jk}\boldsymbol{e}_i\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2}\boldsymbol{e}_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_j}{\partial x_j \partial x_i}\boldsymbol{e}_i \\
&= \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{V} + \frac{1}{2}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V}),
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot [(\nabla \cdot \boldsymbol{V})\boldsymbol{I}] &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\boldsymbol{e}_j\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_i\right) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V}).
\end{aligned}$$

因此,如果黏性系数为常数,黏性项可以简写成

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \Delta \boldsymbol{V} + \frac{1}{3}\mu \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V}).$$

习惯上,只有动量方程(1.24)才称为 N-S 方程. 在黏性系数为常数的情况下,该方程由 C. L. Navier(1827)和 G. G. Stokes(1845)建立. 但对于计算流体力学,把连续性方程、动量守恒方程和能量守恒方程统称为 N-S 方程.

对于理想流体,忽略黏性应力和热传导,得如下的 Euler(欧拉)方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0, \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{V}) = \rho \boldsymbol{f}_v - \nabla p, \tag{1.27}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V} E) = \rho \boldsymbol{f}_v \cdot \boldsymbol{V} - \nabla \cdot (p \boldsymbol{V}) + \rho q. \tag{1.28}$$

但没有理由表明,欧拉方程的解等于 N-S 方程的解在黏性系数趋于零的极限.

在第二章中我们会介绍 Navier - Stokes 方程与 Euler 方程便于计算的更方便形式.

1.2.4 微分方程的封闭性讨论

这里讨论的封闭性类似于数学物理方程中的定解问题.一个定解问题应该包括泛定方程和相应的定解条件.这里考虑的泛定方程就是前面的 Navier - Stokes 方程或 Euler 方程.定解条件包括初始条件和边界条件.注意定解问题不一定是适定(解存在、唯一并且稳定)问题.欧拉方程的适定性将在第三章讨论.另外,流体力学基本方程的求解还涉及一些未知项的模拟(即用已知条件来近似计算一些未知项).模拟问题将在第二章中部分介绍.

1.2.4.1 泛定方程的封闭性,状态方程

对于偏微分方程问题,方程的个数应该等于未知数的个数.如果方程的个数少于未知数个数,则称为欠定问题,解一般不唯一;如果方程的个数大于未知数的个数,则称为超定问题,此时一般无解;如果方程的个数恰好等于未知数的个数,则称为确定问题,如果进一步满足某些条件(如各方程线性无关),那么可能具有唯一的解.前面谈到的流体力学基本方程的个数少于未知数的个数,为了使问题确定,必须补充其他方程.补充的方程往往是代数方程.特别需要指出的是,可压缩流体和不可压缩流体的处理有重大区别.

流体力学的基本方程用到密度 ρ,压力 p 和温度 T 等流动参数.

对于可压缩流体,将本构关系式代入方程后,未知数有 $\rho, \boldsymbol{V}=(V_1, V_2, V_3), T, p$ 等 7 个,而方程只有 5 个(1 个质量方程、3 个动量方程和 1 个能量方程).此时必须补充两个方程或代数关系式.考虑简单可压缩流体.流体的密度 ρ、压力 p 和温度 T 属于状态参数,根据经典热力学状态公理得出只有两个独立参数的结论.有了状态参数中的任意两个便可以得出另一个,确定它们之间关系式的代数方程称为状态方程,一般写成

$$f(\rho, p, T) = 0.$$

对于完全气体(分子间作用力和分子所占据的体积可以忽略的气体),状态方程可以简单写成

$$p = r\rho T \text{ (Clapeyron 方程)}.$$

其中 $r=8314/M$ 为气体常数,M 为气体的分子量.对于空气有 $M=29$,从而 $r\approx287$[J/(kg·K)].

另外,完全气体的内能可以写成

$$e = \int c_V \mathrm{d}T.$$

这里 $c_V = c_V(T)$[J/(kg·K)]为定容比热,即在气体容积不变的情况下单位质量的气体每提高一度温度所需要的热量.如果记 c_P 为定压比热,即在气体压力不变的情况下单位质量的气体每提高一度温度所需要的热量,那么有关系式

$$c_P = c_V + R.$$

经常采用比热比 $\gamma = c_P/c_V$.对于常温下的空气 $\gamma=1.4$.对于燃烧过的气体一般有 $1<\gamma$

<1.4.

如果气体温度不太高(如低于 1000K),那么定容比热和定压比热都可以看成常数,从而内能表达式为 $e=c_VT$.

对于高度压缩的气体,分子间作用力和分子所占据的体积不能忽略,此时得采用如下的状态方程

$$(p+\alpha\rho^2)\left(\frac{1}{\rho}-\beta\right)=rT\ (\text{Van der Waals 方程}).$$

这里 $\alpha\rho^2$ 代表分子间作用力,β 代表单位质量的分子的体积.对于空气有 $\alpha=3\times10^{-3}p_0/\rho_0^2$ 和 $\beta=3\times10^{-3}/\rho_0$.这里 $\rho_0=1.225\text{kg/m}^3$,$p_0=101380\text{N/m}^2$(标准状态值).

对于几百个大气压以上的水,也可以按可压缩流体处理,并可采用下面的状态方程

$$\frac{p+B}{1+B}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n(\text{Cole 方程}).$$

这里 $\rho_0=10^3\text{kg/m}^3$ 为一个大气压下水的密度.如果取 $n=7$ 和 $B=3000$(大气压),则上面的公式误差小于百分之十.

因此,对于可压缩流体,求出 $\rho,\rho\boldsymbol{V},\rho E$ 后,按

$$E=e+\frac{1}{2}|\boldsymbol{V}|^2,$$

便可求得 e,再由 $e=e(T,\rho)$便可求得 T.再由 $p=p(T,\rho)$便可求得 p.

对于不可压缩流体,方程退化为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\rho=0,\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0,\\
&\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V}=\boldsymbol{F}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{P},\\
&\frac{\partial E}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla E=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}+\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{V}+\kappa\nabla T).
\end{aligned}$$

因此,连续性方程一分为二,比可压缩流体多了一个方程.未知数仍为 $\rho,\boldsymbol{V}=(V_1,V_2,V_3),T,p$,共 7 个,而方程有 6 个.可以补充温度与能量之间的关系式

$$E=e(T,\rho)+\frac{1}{2}|\boldsymbol{V}|^2.$$

那么方程的个数便正好等于未知数个数.注意上面的第二个方程($\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$)与其他方程不同,它只与速度对坐标的偏导数有关,属于一种对速度的约束条件.首先由动量方程似乎可以确定速度,而速度又必须满足散度等于零的约束条件,因此似乎对速度的约束条件多了;而对于压力又没有具体方程去求它,似乎属于欠定问题.这正是不可压缩流动方程的特点所在.事实上,应按下面方式来求上述方程:首先由动量方程似乎可以确定速度,而速度又必须满足散度为 0 的约束条件,这只有通过合理选取压力才能得以实现.因此上面的第二个方程与其说是速度的约束条件,不如说是确定压力的方程.计算流体力学中如何通过散度为 0 的条件来确定压力,是不可压流计算的关键.对于许多简单流动问题,可以通过定义某种新的变量使散度为 0 的条件自动满足,同时使压力项消去.

1.2.4.2 初始条件和边界条件

流动是从某时刻开始的，所以必须给定起始时刻的流动条件，称为初始条件，可以写成

$$\rho(\boldsymbol{x},0)=\rho_0(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{x}),p(\boldsymbol{x},0)=p_0(\boldsymbol{x}).$$

初始条件一般由物理问题给定.例如，如果研究静止流体中圆柱突然以恒速度 $\boldsymbol{U}_0$ 运动时周围的流动，则可以将坐标系固定在运动圆柱上，初始条件为

$$\rho(\boldsymbol{x},0)=\rho_0,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},0)=-\boldsymbol{U}_0,p(\boldsymbol{x},0)=p_0.$$

流体区域中一般存在几种边界，如固体壁面、无穷远边界、自由表面、互不掺混流体的界面.这些都是确定的物理边界.有时必须使用有限区域进行计算机求解，此时有限区域是从无限区域人为划定的，人为划定线称为人工边界.无论是物理边界还是人工边界，都要给适当的边界条件.人工边界的处理属于以后章节讨论的问题.这里只讨论物理边界的边界条件.

1)无穷远边界.流体与物体相互作用产生的扰动传播到无穷远时趋于0，所以无穷远处的边界条件可以写成

$$\rho(\infty,t)=\rho_\infty,\boldsymbol{V}(\infty,t)=\boldsymbol{V}_\infty,p(\infty,t)=p_\infty,$$

这里 $\rho_\infty,\boldsymbol{V}_\infty,p_\infty$ 均为常数.

2)介质界面.两介质的界面可以是气、液、固三相中任意两个不同相的界面(如水-空气界面、液滴表面、气泡表面、海面、固体壁面等)，也可以是同一项中不同组成的界面(如水-石油界面).用上标(1)和(2)区别两种介质，用 $\boldsymbol{n}$ 表示界面法向单位矢量，由介质(2)指向介质(1).用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示界面切平面内的两个相互正交的单位矢量，$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$构成右手系.如果两介质互不掺混，则法向速度分量相等

$$V_n^{(1)}=V_n^{(2)}.$$

此时，如果设界面由方程 $\phi(\boldsymbol{x},t)=0$ 定义，则由

$$\phi(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x},t+\delta t)=0\left(\frac{\delta\boldsymbol{x}}{\delta t}=\boldsymbol{V}\right),$$

$$\phi(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x},t+\delta t)=\phi(\boldsymbol{x},t)+\phi_t\delta t+\phi_{x_j}\delta x_j+O[\delta t^2,\delta x^2],$$

得界面运动学方程为

$$\phi_t+\phi_{x_j}V_j=0(\phi_t+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\phi=0).$$

下面考虑动力学边界条件.

对于满足连续介质力学的黏性流体，切向速度分量要连续(否则因梯度无限大、黏性力无限大面出现非平衡)

$$V_a^{(1)}=V_a^{(2)},V_b^{(1)}=V_b^{(2)}.$$

同理，温度也必须连续

$$T^{(1)}=T^{(2)}.$$

但不同介质的密度可以不连续.

由于界面宏观上无限薄，所以必须满足力的平衡条件．介质界面两侧除受压力和黏性力作用外，还存在所谓的表面张力．界面任意点所受的表面张力位于界面的切平面内，它的作用使界面尽量绷紧，从而使界面面积最小（如液滴呈球形）．考虑界面的任意条切割线，表面张力与切割线垂直，大小与切割线长度成正比．单位长度的切割线所受的表面张力 σ(N/m)称为表面张力系数．界面两侧的表面应力之差沿界面法向的投影可以写成

$$\triangle F=[\boldsymbol{P}^{(1)}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{P}^{(2)}\cdot\boldsymbol{n}]\cdot\boldsymbol{n}.$$

考虑面积为 $\mathrm{d}s$ 的界面元在力的作用下沿其法向产生任意小位移 δn．为了方便，考虑界面元中心处界面的主曲率半径 R_1 和 R_2（如果曲率中心在 $\boldsymbol{n}$ 指向的那边，则曲率半径取正值）．界面元沿两条主切割线的投影分别为 $\mathrm{d}l_1$ 和 $\mathrm{d}l_2$，从而 $\mathrm{d}s=\mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2$．长度 $\mathrm{d}l_1$ 和 $\mathrm{d}l_2$ 可以看成半径分别为 R_1 和 R_2 的圆的弧元素．因此，经位移 δn 后，长度 $\mathrm{d}l_1$ 和 $\mathrm{d}l_2$ 分别增加 $(\delta n/R_1)\mathrm{d}l_1$ 和 $(\delta n/R_2)\mathrm{d}l_2$，从面界面元面积增加

$$\delta s=\mathrm{d}l_1\left(1+\frac{\delta n}{R_1}\right)\mathrm{d}l_2\left(1+\frac{\delta n}{R_2}\right)-\mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2\approx\mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\delta n,$$

引起这一位移表面应力和表面张力所做的功为

$$\begin{aligned}\delta W&=-\int(\triangle F\mathrm{d}s\delta n+\sigma\delta s)\\&=-\int\left(\triangle F+\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right)\mathrm{d}s\delta n.\end{aligned}$$

由热力学平衡条件（或虚功原理），必有 $\delta W=0$，从面得力的平衡条件为（不考虑黏性力时称为拉普拉斯公式）

$$\boldsymbol{P}^{(1)}\cdot(-\boldsymbol{n})-\boldsymbol{P}^{(2)}\cdot(-\boldsymbol{n})=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\boldsymbol{n}.$$

因

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}&=-p\boldsymbol{I}+2\mu\left(\boldsymbol{S}-\frac{1}{3}s_{kk}\boldsymbol{I}\right),\\P_{ij}&=-p\delta_{ij}+2\mu\left(s_{ij}-\frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right),\end{aligned}$$

所以力的平衡条件在切向和法向的分量形式为

$$\begin{aligned}&\mu^{(1)}s_{ij}^{(1)}n_ja_i=\mu^{(2)}s_{ij}^{(2)}n_ja_i,\\&\mu^{(1)}s_{ij}^{(1)}n_jb_i=\mu^{(2)}s_{ij}^{(2)}n_jb_i,\\&p^{(1)}-2\mu^{(1)}(s_{ij}^{(1)}n_jn_i-\frac{1}{3}s_{kk}^{(1)})=p^{(2)}-2\mu^{(2)}\left(s_{ij}^{(2)}n_jn_i-\frac{1}{3}s_{kk}^{(2)}\right)+\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).\end{aligned}$$

同理，热的平衡条件可以表示为

$$\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial n}\right)^{(1)}=\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial n}\right)^{(2)}.$$

因此，对于连续介质假设下的黏性流体，界面条件为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{V}^{(1)}=\boldsymbol{V}^{(2)},\\&\mu^{(1)}s_{ij}^{(1)}n_ja_i=\mu^{(2)}s_{ij}^{(2)}n_ja_i,\\&\mu^{(1)}s_{ij}^{(1)}n_jb_i=\mu^{(2)}s_{ij}^{(2)}n_jb_i,\end{aligned}$$

$$p^{(1)} - 2\mu^{(1)}\left(s_{ij}^{(1)}n_jn_i - \frac{1}{3}s_{kk}^{(1)}\right) = p^{(2)} - 2\mu^{(2)}\left(s_{ij}^{(2)}n_jn_i - \frac{1}{3}s_{kk}^{(2)}\right) + \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}, \left(\kappa\frac{\partial T}{\partial n}\right)^{(1)} = \left(\kappa\frac{\partial T}{\partial n}\right)^{(2)}.$$

对于理想流体,黏性作用和热传导作用不存在,所以上述条件退化为

$$V_n^{(1)} = V_n^{(2)},$$

$$p^{(1)} = p^{(2)} + \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (\text{Laplace 方程}).$$

3)固体壁面(固体一侧的值用上标 w 表示). 对于固体壁面,不关心固壁那一侧的变化,只关心流体一侧的变化,所以(黏性)边界条件简化为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^{(w)}, T = T^{(w)}, \left(\kappa\frac{\partial T}{\partial n}\right) = \left(\kappa\frac{\partial T}{\partial n}\right)^{(w)}.$$

对于静止固壁 $\boldsymbol{V}^{(w)}=0$. 上式中, $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^{(w)}$ 称为黏性无滑移边界条件. 对于理想流体,无滑移条件用滑移条件 $V_n = V_n^{(w)}$ 代替. 理想流体的边界条件可以写成

$$V_n = V_n^{(w)}.$$

将该条件代入法向动量方程(即动量方程在法向的投影)后,可以得一压力关系式

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho V_\tau^2}{R}.$$

这里 V_τ 为速度在壁面上的投影(设方向为 $\boldsymbol{\tau}$), R 为壁面法向 $\boldsymbol{n}$ 矢量(指向流体一侧)和切向矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 构成的平面与固壁的切线的曲率半径(如果曲率中心指向固体一侧,则曲率半径取正值).

4)自由界面. 对于气-液界面问题,如果气相运动不太强于液相运动,则由于气体密度和黏性系数远远小于液体的,所以惯性力、黏性力引起的压力及应力变化和液体的相比可以忽略,于是流体一侧界面条件简化为

$$s_{ij}n_ja_i = 0, \quad s_{ij}n_jb_i = 0;$$

$$p - 2\mu\left(s_{ij}n_jn_i - \frac{1}{3}s_{kk}\right) = p_0.$$

这里 p_0 表示气体的压力(如大气压力). 对于理想流体,上面的条件可以进一步简化为

$$p = p_0.$$

上面考虑的边界条件属于物理上自然满足的条件. 但作为数学问题,不一定能使用所有的边界条件. 以固体壁面为例,我们不能同时给定壁面温度和温度梯度,即不能同时使用下面的两个边界条件

$$T = T^{(w)}, \left(\kappa\frac{\partial T}{\partial n}\right) = \left(\kappa\frac{\partial T}{\partial n}\right)^{(w)}. \tag{1.29}$$

温度条件的正确给定还依赖于问题的性质即面体那一侧的性质.

如果固体是绝热的(习惯上称绝热壁),那么法向温度梯度为零,从而只能采用下面的所谓绝热条件

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0.$$

此时固体壁面温度完全由流体内部的温度决定,也就是说,壁面温度如同内部流动参数一样,属于未知数.有了绝热条件和其他针对速度的条件,流体内部的参数都可以求出来,有了流体内部的温度,壁面温度按条件$\frac{\partial T}{\partial n}=0$就等于靠近壁面的内部流体温度.如果同时又给定壁面温度,那么问题变成超定的.

如果固体表面温度是给定不变的(习惯上称等温壁),那么只能采用下面的条件

$$T = T^{(w)}.$$

如果固体属于绝热材料,那么一般可以采用绝热条件,如果固体导热性能特别好,则可以采用等温条件.实际上对于许多工程问题我们感兴趣的是速度和压力分布,流场变化与壁面温度关系不太大,此时采用等温条件和绝热条件均可.

如果需要确切考虑温度条件,那么必须将描述流体运动的基本方程与固体中的热传导方程联立求解.此时必须同时使用(1.29)中的两个条件.本书其他部分还会详细讨论在计算流体力学中如何正确地使用边界条件.

1.3 N-S方程的特殊形式

1.3.1 动量方程的其他形式与应用

将连续性方程(1.20)两端乘以速度矢量,将动量方程(1.21)与由此所得的方程相减得

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} = \rho \boldsymbol{f}_v + \nabla \cdot \boldsymbol{P}. \tag{1.30}$$

即

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \rho f_{vi} + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}.$$

从场论得知

$$\nabla \frac{V^2}{2} = (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V} \times (\nabla \times \boldsymbol{V}).$$

将上式代入(1.30),两边同除以密度,并考虑到旋度定义 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{V}$,得如下动量方程的兰姆-葛罗米柯形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla \frac{V^2}{2} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{f}_v + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{P}, \tag{1.31}$$

利用该方程很容易在某些特殊情况下将动量方程积分出来.

1.3.1.1 旋涡的动力学性质

对于理想(无黏)、正压(即密度只是压力的函数)、而且外力有势(即外力等于某标量函数的梯度)流体,旋涡有一些特殊动力学性质,可以通过动量方程来研究.对于理想流

体，动量方程(1.30)可以写为

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{f}_v.$$

又根据正压流体假设和外力有势，得如下关系式

$$\frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla\Pi,\quad \Pi=\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho},$$

$$\boldsymbol{f}_v=\nabla\Phi.$$

因此动量方程可以进一步简化为

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\nabla(\Phi-\Pi). \tag{1.32}$$

1. 开尔文(Kelvin)定理

沿任意封闭物质线的速度环量(从而通过任意物质面的涡通量)在运动过程中不变，即$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=0$.

前面已经知道，物质线速度环量(速度物质线积分)的随体导数有如下表达式

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\oint_{L^*}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}^*=\oint_{L^*}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}^*.$$

将动量方程(1.32)代入得

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=\oint_{L^*}\nabla(\Phi-\Pi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}^*.$$

假设 A 为由物质线L^*张成的任意连续曲面，则由斯托克斯定理得

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=\oint_{L^*}\nabla(\Phi-\Pi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}^*=\int_A\nabla\times[\nabla(\Phi-\Pi)]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A.$$

从矢量分析知，任意梯度的旋度为 0，即$\nabla\times[\nabla(\Phi-\Pi)]=0$. 从而

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t}=0.$$

于是定理得证.

2. 拉格朗日定理(旋涡不生不灭定理)

如果在某时刻某部分流体无旋(或有旋)，则在其他时刻这部分流体仍保持无旋(或有旋).

假设在某时刻某部分流动(部分理解为流体微团集合，而非空间固定区域)是无旋的. 在该部分流体中任取一连续物质曲面 A，它的边界 L^*为物质线(即所考虑的物质曲面是由这条封闭物质线张成的). 由速度环量定义 $\Gamma=\oint_{L^*}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}^*$、涡通量定义 $I=\int_A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A$ 和斯托克斯定理得

$$I=\Gamma.$$

再由开尔文定理知，Γ 不随时间变化. 因此 I 也不随时间变化. 由于初始时刻有 $I=\int_A\boldsymbol{\omega}\cdot$

$\boldsymbol{n}\mathrm{d}A \overset{\omega=0}{=} 0$，因此对于任意时刻都有 $I=0$. 又由所选曲面的任意性，所以对于任意时刻，恒有 $\boldsymbol{\omega}=0$.

上面的证明没有考虑时间的方向性，因此所说的任意时刻也包括以前的时刻. 假设对于某部分流体在某时刻是无旋的，则该部分流体在以前的时刻也无旋，因此有旋流体到了以后的时刻不可能变得无旋.

3. Helmoltz 第一定理（涡线、涡面、涡管保持定理）

在某时刻组成涡线（涡面、涡管）的流体质点在其他任意时刻也永远组成涡线（涡面、涡管）.

证明思路是这样的. 考虑任意涡面 Σ，涡面上任一点的旋度在涡面法向上的投影 $\omega_n=0$（这是涡面的定义）. 到了新的时刻，该涡面运动到 Σ'. 根据开尔文定理，有

$$\int_{\Sigma'} \omega_n \mathrm{d}\Sigma' = \int_{\Sigma} \omega_n \mathrm{d}\Sigma = 0.$$

因涡面 Σ 是任取的，所以 Σ' 也是任意的. 所以在 Σ' 上必有 $\omega_n=0$，即 Σ' 也是涡面. 这就证明了涡面保持定理. 由于涡管是涡面的特例，所以由涡面保持定理证明了涡管保持定理. 对于涡线，可以看成是两个涡面的交线，由涡面保持定理，构成该交线的流体质点在其他时刻仍在两涡面上，即仍为新时刻两涡面的交线，从而仍为涡线. 因此涡线保持定理得证.

4. Helmoltz 第二定理（涡管强度保持定理）

涡管强度在运动过程中保持不变.

这是因为，涡管强度等于通过涡管任一横截面的涡通量. 根据上面定理，该涡管在任意时刻仍由同样的流体质点组成. 根据开尔文定理，对于由同一组质点组成的曲面涡通量不随时间变化，因此涡管强度也不随时间变化.

上面给出了理想正压且外力有势流体旋涡随体（质点）变化的三个主要定理，即旋涡不生不灭定理，涡线保持定理，涡管强度保持定理. 从上可以看出，流体运动的旋涡性是永远保持的，即无旋则永远无旋，有旋则永远有旋. 对于有旋运动，组成涡线、涡管的质点永远组成涡线、涡管. 好像流体质点冻结在涡线上随涡线一起运动. 同时在运动过程中涡管强度也保持不变. 因此，旋涡随体变化的最主要性质是保持性或冻结性. 但这些特性是在许多假设下成立的，千万不要推广到黏性流体、斜压流体或外力无势的流体中去. 正压流体（如等温流体或绝热流体或不可压缩流体）和外力有势（如重力场中）的情况较常出现. 但任何流体都是有黏性的，所以不存在真正的理想流体. 此时前面定理在黏性影响与涡量强度相比较小的情况下还是有意义的.

1.3.1.2　动量方程的积分

考虑理想、正压、外力有势的流动. 首先，写出理想流体的兰姆-柯罗米柯形式的运动方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla\cdot\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2}+(\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{1.33}$$

由外力有势得

$$\boldsymbol{F}=\nabla\Phi. \tag{1.34}$$

由正压流体假设($\rho=\rho(p)$)得

$$\frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla\Pi. \tag{1.35}$$

这里 $\Pi=\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)}$.

将式(1.34)至(1.35)代入动量方程(1.33)便得如下理想、正压、外力有势的动量方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2}+\Pi+\Phi\right)+(\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{V}=0. \tag{1.36}$$

对于有旋流动,$\nabla\times\boldsymbol{V}\neq 0$.考虑定常流动.于是动量方程(1.36)可以写成如下形式

$$\nabla\left(\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2}+\Pi+\Phi\right)+(\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{V}=0.$$

为了消去与旋度有关的项,考虑沿流线的积分.将上式两边点乘流线的切线单位向量 $\boldsymbol{s}=\frac{\boldsymbol{V}}{|\boldsymbol{V}|}$,得

$$\boldsymbol{s}\cdot\nabla\left(\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2}+\Pi+\Phi\right)+\boldsymbol{s}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V})=0.$$

因$\nabla\times\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}$与$\boldsymbol{V}$垂直,所以 $\boldsymbol{V}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V})=0$,所以必有

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2}+\Pi+\Phi\right)=0.$$

将上式积分后便得伯努利积分

$$\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2}+\Pi+\Phi=C(\psi). \tag{1.37}$$

这里 C 为积分常数,它沿同一条流线取同一常数值,在不同流线上可以取不同的值.对于不可压缩流体$\left(\Pi=\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=\frac{p}{\rho}\right)$,如果忽略重力,则伯努利积分简化为

$$\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2}+\frac{p}{\rho}=C(\psi).$$

因此,流速大时压力小,流速小时压力大.低速飞机的机翼采用向上弯曲的剖面,使得流过上表面的气流比下表面的快,从而上表面压力小,下表面压力大,产生静升力.这就是伯努力方程在近代航空史上的基本应用.

对于无旋流动,$\nabla\times\boldsymbol{V}=0$,并且存在速度位 ϕ,满足 $\boldsymbol{V}=\nabla\phi$,于是动量方程(1.36)可以写成如下形式

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2}+\Pi+\Phi\right)=0.$$

于是,括号内的函数与空间坐标无关,最多只是时间的函数,因此得下面的拉格朗日积分

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2}+\Pi+\Phi=f(t). \tag{1.38}$$

这里 $f(t)$为时间的任意函数. 对于定常流动,上式可进一步简化成下面的伯努利-拉格朗日积分

$$\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2} + \Pi + \Phi = C. \tag{1.39}$$

这里 C 为常数.

如果流体密度处处为常数且外力为重力场,则上式简化成

$$\frac{|\boldsymbol{V}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C.$$

这里 g 为重力加速度.

1.3.1.3　涡动力学基本方程

对兰姆-葛罗米柯方程(1.31)取旋度,利用向量公式

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) - \boldsymbol{V}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}),$$

和对任意标量 ϕ 和任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 成立的恒等式

$$\nabla \times (\nabla \phi) \equiv 0, \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) \equiv 0,$$

便得旋度所满足的方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{V} - \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \boldsymbol{V} + \nabla \times \boldsymbol{F}_v + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{P}\right). \tag{1.40}$$

将上式右边第二项移到左边和和原左边第一项合并,得

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{V} + \nabla \times \boldsymbol{F}_v + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{P}\right). \tag{1.41}$$

这就是涡动力学的基本方程.

对于牛顿流体,在斯托克斯假设和黏性系数为常数的情况下

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P} = -\nabla p + \mu \triangle \boldsymbol{V} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{V}).$$

并且有

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p\right) = \nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \times (\nabla p) = \nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p = -\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p.$$

因此涡动力学方程简化为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{V} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times \boldsymbol{F}_v + \nabla \times \left[\nu \triangle \boldsymbol{V} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{V})\right]. \tag{1.42}$$

进一步如果密度为常数,则

$$\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p = 0,$$

$$\nabla \times (\nu \triangle \boldsymbol{V}) \overset{\nu = \text{const}}{=} \nu \triangle \boldsymbol{\omega},$$

$$\nabla \times (\nu \nabla \cdot \boldsymbol{V}) \overset{\nu = \text{const}}{=} \nu \nabla \times (\nabla \cdot \boldsymbol{V}) = 0.$$

因此对于不可压缩密度均匀分布流体，涡动力学方程为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega V}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{V} + \nabla \times \boldsymbol{F}_v + \nu \triangle \boldsymbol{\omega}. \tag{1.43}$$

对于理想正压可压缩流体，如果外力有势，则

$$\mu = 0,$$
$$\boldsymbol{F}_v = -\triangle \Phi \Rightarrow \nabla \times \boldsymbol{F}_v = 0,$$
$$p = p(\rho) \Rightarrow \nabla \rho \times \nabla p = 0.$$

相应的涡动力学方程称为亥姆霍兹方程，可写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega V}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{V}.$$

考虑黏性系数为常数的情况，将动量方程写成下面形式

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \boldsymbol{F} + \nu \triangle \boldsymbol{V} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{V}). \tag{1.44}$$

于是对于由封闭物质线 L^* 定义的速度环量，有

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t} = \oint_{L^*} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}^* - \oint_{L^*} \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}^* + \oint_{L^*} \nu \left[\triangle \boldsymbol{V} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{V}) \right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}^*. \tag{1.45}$$

上式也是涡动力学方程的某种形式.

下面以方程(1.42)为例考察各种因素对涡运动的影响.

1)左端第二项表示因对流对涡量变化的影响.

2)右端第一项表示因流体的变形引起的涡量变化.这种变形包括纯变形和旋转运动.拉伸或压缩变形运动使得想象的涡管变细或变粗，从而使得涡量强度增加或减小.旋转运动使得想象的涡管改变方向.

3)右端第二项表示斜压流体因密度和压力梯度方向不一致的影响.对于密度分层的大气，如果压力梯度方向与分层方向不垂直，则有涡的产生.赤道国家贸易风就是这种机理产生的.由于太阳照射强度不同，在同一高度，赤道温度比北极温度高，从而赤道密度比北极低.另外，在同一地点，高度越大，空气越稀薄.所以既存在由赤道向北极的密度增加，又存在由高空向地面的密度增加，于是密度梯度由上朝下由赤道指向北极.而同一高度压力相等，高度增加压力减小，所以压力梯度指向地心.于是密度梯度和压力梯度均在同一平面内，并且有：$\nabla \rho \times \nabla p = c\boldsymbol{n}$，$c>0$.这里 $\boldsymbol{n}$ 指向西方.进一步分析表明，在地球北半球表面，贸易风应该自东北向西南吹.

4)右端第三项为有旋质量力场影响.例如旋转参照系中的柯氏力能使流体微团旋转，产生涡量.如果质量力有势，如重力场，则不产生涡量.事实上，由于地球自转，自转角速度与上面介绍的(地球表面)贸易风相互作用产生的柯氏力将进一步影响贸易风.现在将坐标取在地球上，速度 $\boldsymbol{V}_r$ 为相对地球表面固定点的速度.此时体积力改写为(见1.33).

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}_e - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r.$$

这里 $\boldsymbol{g}$ 为重力加速度，$\boldsymbol{a}_e$ 为牵连加速度，$\boldsymbol{\omega}$ 为地球自转角速度.由于不考虑坐标原点和角速度随时间的变化，所以

$$a_e = \omega \times (\omega \times r) = -\omega^2 r = -\nabla\left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2\right).$$

即牵移加速度对应的惯性力有势.这里 r 为从地心到流场某点的距离.另外

$$g = -\nabla(gr),$$

所以

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \int_A \frac{1}{\rho^2}(\nabla\rho \times \nabla p) \cdot n \mathrm{d}A - 2\oint(\omega \times V_r) \cdot \mathrm{d}L^*.$$

上式右端第一项影响已经考虑了,下面考虑第二项影响.为此,将此单独影响写成方程

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -2\oint(\omega \times V_r) \cdot \mathrm{d}L^* = 2\oint(V_r \times \omega) \cdot \mathrm{d}L^*.$$

我们知道 ω 由南极指向北极,而因贸易风引起的 V_r 在地球表面上指向南方,所以 $V_r \times \omega$ 必然由东指向西方.因此如果 L^* 为垂直于地球自转轴线的圆,走向为自东向西,则

$$\frac{D\Gamma}{Dt} > 0.$$

因此,风速有一个自东向西的分量.

5)右端第四项表示因黏性和涡量分布不均匀引起的涡量扩散.它类似于热的扩散.考虑孤立涡丝,其周围的速度分布为

$$V_\theta(r,\theta,t=0) = \frac{\Gamma}{2\pi r}, V_r(r,\theta,t=0) = 0.$$

由于初始场的对称性,流场在任意时刻都满足如下条件

$$V_r = V_z = \omega_r = \omega_\theta = 0.$$

相应的涡动力学方程可以简化为

$$\frac{\partial\omega_z}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2\omega_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\omega_z}{\partial r}\right).$$

除外 $r=0$,上述方程的解为

$$\omega_z = \frac{\Gamma}{2\pi\nu t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right), V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right].$$

显然当 $t \to \infty$,有 $\omega_z \to 0$.

根据前面的分析,如果流体没有黏性而且流场首先没有涡的存在,那么只有可能在斜压流体中或者存在无势的体积力时才有可能产生涡.

其实还可以定义一些新的物理量来研究涡运动.例如可以定义拟涡能 $\omega = \frac{1}{2}\omega_i\omega_i$.将涡动力学方程点乘旋度,便得拟涡能的方程.例如,将亥姆霍兹方程点乘旋度后写为

$$\omega_i\frac{\partial\omega_i}{\partial t} + \omega_i V_j\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} = \omega_i\omega_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \nu\omega_i\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_i\partial x_j},$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\omega_i\omega_i\right) = \omega_i\omega_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \nu\frac{\partial^2 \frac{1}{2}\omega_i\omega_i}{\partial x_i\partial x_j} - \nu\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}. \tag{1.46}$$

上式右端各项按顺序分别表示涡的生成、扩散与耗散.

还可以定义螺旋度 $H(t)$和螺旋度密度 $h(t)$:$h(t) = V \cdot \omega$,$H(t) = \int_D V \cdot \omega \mathrm{d}V$.涡

管是否能破裂或在空间打结,从而改变拓扑结构,可以通过螺旋度的变化来研究.这是因为,涡量沿着涡管的轴线方向,旋度与速度的点积反映了涡管对运动流体的跟随性.可以证明,在无限空间中,对于两个互不连接的涡环,螺旋度为0;对于两个相互连接的涡环,螺旋度不为0.因此,螺旋度是涡的拓扑结构的衡量.如果螺旋度不随时间变化,则表示涡结构的拓扑性质不变。可以构造螺旋度的方程,证明对于理想、正压和外力有势时,螺旋度不随时间变化,因此拓扑结构不变.

1.3.2 能量方程的其他形式——内能方程、温度方程、焓方程与熵方程

将连续性方程(1.20)两端乘以速度矢量,将动量方程的守恒形式(1.21)与由此所得的方程相减得

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{f}_v+\nabla\cdot\boldsymbol{P}.$$

两边点乘 $\boldsymbol{V}$ 得动能所满足的方程

$$\rho\frac{\mathrm{D}\dfrac{V^2}{2}}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{f}_v+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}.\tag{1.47}$$

将连续性方程(1.20)两端乘以总能,将能量方程的守恒形式(1.22)与由此所得的方程相减得

$$\rho\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{f}_v\cdot\boldsymbol{V}+\nabla(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{P})+\rho\dot{q}+\nabla\cdot(\kappa\nabla T).\tag{1.48}$$

用(1.48)减去(1.47),并利用关系式 $E=e+\frac{1}{2}V^2$,便得内能所满足的方程

$$\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}=\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{P})-\boldsymbol{V}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{P})+\rho\dot{q}+\nabla\cdot(\kappa\nabla T).$$

由张量关系式

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{P})=\nabla\boldsymbol{V}:\boldsymbol{P}+\boldsymbol{V}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{P}),$$

所以上式也可以写成

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t}+\rho\boldsymbol{V}\cdot\nabla e=\nabla\boldsymbol{V}:\boldsymbol{P}+\rho\dot{q}+\nabla\cdot(\kappa\nabla T).$$

这里

$$\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{V}:\boldsymbol{P}&=\frac{\partial V_i}{\partial x_j}P_{ij}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)P_{ij}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}-\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)P_{ij}\\&=s_{ij}P_{ij}+a_{ij}P_{ij}.\end{aligned}$$

由于 a_{ij} 是反对称张量,P_{ij} 是对称张量,所以 $a_{ij}P_{ij}=0$.从而

$$\nabla\boldsymbol{V}:\boldsymbol{P}=\boldsymbol{S}:\boldsymbol{P},\boldsymbol{S}=(s_{ij}).$$

因此,内能所满足的方程可以简写成

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t}+\rho\boldsymbol{V}\cdot\nabla e=\boldsymbol{S}:\boldsymbol{P}+\rho q+\nabla\cdot(\kappa\nabla T).\tag{1.49}$$

利用连续性方程，上式也可以写成

$$\frac{\partial\rho e}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}e)=\boldsymbol{S}:\boldsymbol{P}+\rho q+\nabla\cdot(\kappa\nabla T).\tag{1.50}$$

可以证明

$$\boldsymbol{S}:\boldsymbol{P}=-p\nabla\cdot\boldsymbol{V}+\mu'(\nabla\cdot\boldsymbol{V})^2+\Phi.$$

这里

$$\Phi=-\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{V})^2+2\mu\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S}.$$

为黏性耗散所损失的机械能，全部转换为热能，因此称为耗散函数. 一般情况下忽略第二黏性系数影响. 不难求得耗散函数的如下表达式

$$\Phi=\mu\left[\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3}+\frac{\partial V_3}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1}+\frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2}+\frac{\partial V_2}{\partial x_1}\right)^2\right]$$
$$+\frac{2}{3}\mu\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1}-\frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_2}-\frac{\partial V_3}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_3}-\frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right)^2\right].$$

显然，如果黏性系数为正，那么耗散函数为零或为正.

在常温下，内能可以与温度按 $e=c_VT$ 联系起来，因此从内能方程也可以得温度方程. 传热专业习惯使用温度所满足的能量方程. 对于传热问题，压力所做的功和黏性耗散作用与热传导作用相比往往可以忽略，从而能量方程经常写成

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla T=\frac{1}{c_V}q+\frac{1}{\rho c_V}\nabla\cdot(\kappa\nabla T).\tag{1.51}$$

燃烧专业则更习惯使用焓 $h=e+p/\rho$ 所满足的能量方程，并且因黏性耗散作用与其他作用（如热传导、化学反应）相比较小而常被忽略. 利用(1.50)和焓的定义得

$$\frac{\partial\rho h}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}h)=\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}+\rho q+\nabla\cdot(\kappa\nabla T)+\Phi.\tag{1.52}$$

这里 Φ 与燃烧和对流换热相比往往可以忽略.

考虑单位质量的气体. 传给该流体一定的热量 δQ，则引起流体的内能增加 $\mathrm{d}e$ 并引起流体的体积增加 $\mathrm{d}\frac{1}{\rho}$. 流体因膨胀对外界做的功为 $p\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right)$. 根据热力学第一定律有

$$\delta Q=\mathrm{d}e+p\mathrm{d}\frac{1}{\rho}.$$

用关系式 $\delta Q=T\mathrm{d}S$ 定义流体的熵 S. 再根据热力学第一定律便得

$$\mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}e}{T}+\frac{p}{T}\mathrm{d}\frac{1}{\rho}.\tag{1.53}$$

对于完全气体，有

$$S=\int\frac{c_V}{T}\mathrm{d}T-\frac{p}{T\rho^2}\mathrm{d}\rho=\int c_V\mathrm{d}\ln T-R\ln\rho.$$

进一步如果 c_V 为常数，有

$$S=c_V\ln\frac{p}{\rho^\gamma}+C.$$

这里 C 为常数,一般令 $C=0$.

利用散度定义 $\triangle\cdot\boldsymbol{V}=\dfrac{\mathrm{D}\frac{1}{\rho}}{\mathrm{D}t}\dfrac{1}{\frac{1}{\rho}}$ 和关系式(1.53),得

$$\rho T\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}=\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}+p\frac{\mathrm{D}\frac{1}{\rho}}{\mathrm{D}t}\frac{1}{\frac{1}{\rho}}=\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}+p\nabla\cdot\boldsymbol{V}.$$

再将内能方程(1.49)代入上式便得熵方程

$$\rho T\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}=\Phi+\rho q+\nabla\cdot(\kappa\nabla T).\tag{1.54}$$

根据热力学第二定律,孤立系统的熵不能减少.现在考虑一物质体,体积和边界分别为 Ω^* 和 Σ^*.忽略生成热(它为正因而也使熵增加,从而不改变下面的结论),由关系式(1.54)得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^*}\rho\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\Omega^*&=\int_{\Omega^*}\left(\frac{\Phi}{T}+\frac{\nabla\cdot(\kappa\nabla T)}{T}\right)\mathrm{d}\Omega^*\\&=\int_{\Omega^*}\left(\frac{\Phi}{T}+\frac{\kappa(\nabla T)^2}{T^2}\right)\mathrm{d}\Omega^*+\int_{\Omega^*}\nabla\cdot\left(\frac{\kappa\nabla T}{T}\right)\mathrm{d}\Omega^*\\&=\int_{\Omega^*}\left(\frac{\Phi}{T}+\frac{\kappa(\nabla T)^2}{T^2}\right)\mathrm{d}\Omega^*+\int_{\Sigma^*}\left(\frac{\kappa\nabla T}{T}\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma^*.\end{aligned}$$

由于考虑的是孤立系统即考虑绝热边界,所以上式最右端的通过边界的热流量应该为零.因此有

$$\int_{\Omega^*}\rho\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\Omega^*=\int_{\Omega^*}\left(\frac{\Phi}{T}+\frac{\kappa(\nabla T)^2}{T^2}\right)\mathrm{d}\Omega^*.$$

由熵增原理得

$$\int_{\Omega^*}\rho\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}\Omega^*>0.$$

因此必然有 $\kappa>0$ 和 $\mu>0$.于是黏性系数和热传导系数为正是热力学第二定律的必然结果.正因为这些耗散系数为正,才使得流体力学的基本过程属于不可逆过程.

熵必须增加或为零这一条件在计算流体力学的理论中有重要应用(见第三章).有趣的是,计算流体力学基本理论中用的熵与这里的熵反了一个符号,从而计算流体力学的理论工作者会说,熵应该减小而不能增加.

1.3.3　非惯性坐标系中的方程

对于某些问题,将坐标系固定在某运动物体中更方便.特别地,在静止坐标系中的非定常运动,可能相对某运动坐标系属于定常运动,因此将坐标系固定在运动物体上更简单.研究绕飞行器的流动,可能将坐标系固定在飞行器上更自然.研究绕地面的流动时,将坐标系固定在地球上随地球一起转动更恰当.

1.3.3.1　加速度分解

运动坐标系 $\boldsymbol{x}_r$ 与绝对坐标系 $\boldsymbol{x}$ 之间存在相对运动(平动 $\boldsymbol{x}_0(t)$和转动 $\boldsymbol{Q}(t)$)

$$x_{ri} = x_{0i}(t) + Q_{ij}x_j,$$

一般属于非惯性坐标系,因此在偏微分方程中体积力应该包含惯性力 $-\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}$ 为质点相对绝对坐标系的牵连加速度与哥氏加速度之和.

质点的(相对于绝对坐标系)绝对速度 $\boldsymbol{V}_a$ 和(相对于运动坐标系的)相对速度 $\boldsymbol{V}_r$ 之间存在关系式

$$\boldsymbol{V}_a = \boldsymbol{V}_r + \boldsymbol{V}_e.$$

这里 $\boldsymbol{V}_e$ 为牵连速度.设 $\boldsymbol{V}_\mathrm{O}$ 为运动坐标系原点 O(相对绝对坐标系)的平动速度,$\boldsymbol{\Omega}$ 为该运动坐标系以其原点 O 为中心(相对绝对坐标系)的转动角速度,则有

$$\boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{V}_\mathrm{O} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}.$$

这里,$\boldsymbol{r}$ 为质点相对运动坐标系原点的矢径.

质点的绝对加速度(即在绝对坐标系中的加速度)$\boldsymbol{a}_a$ 与相对加速度(即在相对坐标系中的加速度)$\boldsymbol{a}_r$ 之间存在如下关系式

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_c.$$

这里 $\boldsymbol{a}_e$ 为迁移加速度,$\boldsymbol{a}_c$ 为加哥氏加速度:

$$\boldsymbol{a}_e = \dot{\boldsymbol{V}}_\mathrm{O}(t) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}),$$

$$\boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V}_r.$$

这里

$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$为角加速度,

$\dot{\boldsymbol{V}}_\mathrm{O}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_\mathrm{O}(t)}{\mathrm{d}t}$为运动坐标系原点加速度,

$\dot{\boldsymbol{\Omega}}(t) \times \boldsymbol{r}$ 为切向加速度,

$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})$为向心加速度,

$2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V}$ 为哥氏加速度.

1.3.3.2　流动参数及其微分运算的基本变换关系式

对满足客观不变原则的标量 $\phi = \phi(\boldsymbol{x}, t)$(如密度、内能、压力、温度)、对速度矢量 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$和应力张量 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, t)$,在运动坐标系中分别记为 $\phi_r = \phi_r(\boldsymbol{x}_r, t)$、$\boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{V}_r(\boldsymbol{x}_r, t)$和 $\boldsymbol{P}_r = \boldsymbol{P}_r(\boldsymbol{x}_r, t)$.这里,对流动参数的下标 r 和对微分算子的上标 r 表示是相对运动坐标系(这是为了这里的区别,不用区别时可以省略下标).例如,$\frac{\mathrm{D}^{(r)}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}_r \cdot$

$\nabla^{(r)}$, $\nabla^{(r)}=\boldsymbol{e}_k^{(r)}\dfrac{\partial}{\partial x_{rk}}$表示在运动坐标系中的微分. 于是质点的绝对加速度 $\boldsymbol{a}_a$ 为$\dfrac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}$，相对加速度 $\boldsymbol{a}_r$ 为$\dfrac{\mathrm{D}^{(r)}\boldsymbol{V}_r}{\mathrm{D}t}$.

考虑坐标变换:

$$x_{ri} = x_{0i} + Q_{ij}x_j = x_{ri}(x_j, t),$$
$$t_r = t = t_r(t),$$
$$\boldsymbol{e}_k^{(r)} = Q_{ki}\boldsymbol{e}_i,$$

对于应力张量，根据客观不变性原则，有

$$P_{rij} = Q_{il}P_{lm}Q_{jm}.$$

将两端同时乘以 $\boldsymbol{e}_i^{(r)}\boldsymbol{e}_j^{(r)}$，得

$$\boldsymbol{e}_i^{(r)}P_{rij}\boldsymbol{e}_j^{(r)} = Q_{il}\boldsymbol{e}_i^{(r)}P_{lm}Q_{jm}\boldsymbol{e}_j^{(r)}.$$

从坐标变换有

$$\boldsymbol{e}_l = Q_{il}\boldsymbol{e}_i^{(r)}, \boldsymbol{e}_m = Q_{jm}\boldsymbol{e}_j^{(r)}.$$

因此

$$\boldsymbol{e}_i^{(r)}P_{rij}\boldsymbol{e}_j^{(r)} = \boldsymbol{e}_lP_{lm}\boldsymbol{e}_m.$$

即在两个坐标系中(按各自基矢量定义的)应力张量相等

$$\boldsymbol{P}_r = \boldsymbol{P}.$$

对于任意标量 ϕ，有

$$\begin{aligned}\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i &= \frac{\partial\phi}{\partial x_{rk}}\frac{\partial x_{rk}}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i + \frac{\partial\phi}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x_{rk}}Q_{ki}\boldsymbol{e}_i \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x_{rk}}\boldsymbol{e}_k^{(r)} = \nabla^{(r)}\phi.\end{aligned}$$

对于满足客观性原则的标量 $\phi=\phi_r$:

$$\nabla\phi = \nabla^{(r)}\phi_r.$$

对于速度有

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{V} &= \nabla\cdot(\boldsymbol{V}_r + \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) \\ &= \nabla\cdot(\boldsymbol{V}_r + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) \\ &\overset{\nabla\times\boldsymbol{r}=0}{=} \nabla\cdot\boldsymbol{V}_r = \nabla^{(r)}\cdot\boldsymbol{V}_r.\end{aligned}$$

对于满足客观性原则标量的质点导数，有

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = \phi_r(\boldsymbol{x}_r(\boldsymbol{x},t), t_r(t)),$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial x_j} = \frac{\partial\phi_r}{\partial x_{ri}}Q_{ij},$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi_r}{\partial x_{ri}}\frac{\partial x_{ri}}{\partial t_r} + \frac{\partial\phi_r}{\partial t_r},$$

$$\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+V_j\frac{\partial\phi}{\partial x_j}$$
$$=\frac{\partial\phi_r}{\partial t_r}+\frac{\partial\phi_r}{\partial x_{ri}}\left(\frac{\partial x_{ri}}{\partial t_r}+Q_{ij}V_j\right)$$
$$=\frac{\partial\phi_r}{\partial t_r}+\frac{\partial\phi_r}{\partial x_{ri}}V_{ri}=\frac{\mathrm{D}^{(r)}\phi_r}{\mathrm{D}t_r}=\frac{\mathrm{D}^{(r)}\phi_r}{\mathrm{D}t}.$$

于是得到了下面的几个基本变换公式

- 对于任意标量 ϕ 和应力张量 $\boldsymbol{P}$,我们有

$$\nabla^{(r)}\phi=\nabla\phi,$$
$$\boldsymbol{P}_r=\boldsymbol{P}.$$

- 对于速度矢量和满足坐标不变原理的标量 ϕ 和张量 $\boldsymbol{P}$,有

$$\nabla^{(r)}\phi_r=\nabla\phi,$$
$$\nabla_r\cdot\boldsymbol{V}_r=\nabla\cdot\boldsymbol{V},\nabla_r\boldsymbol{V}_r=\nabla\boldsymbol{V},$$
$$\nabla_r\cdot\boldsymbol{P}_r=\nabla\cdot\boldsymbol{P},$$
$$\frac{\mathrm{D}^{(r)}\phi_r}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t}.$$

1.3.3.3 非惯性坐标系中方程的推导

推导非惯性坐标系中的方程有两种方法:直接法与间接法.

A)直接法就是直接在非惯性坐标系中构造方程.与惯性坐标系相比,多了惯性力强度

$$-\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_c).$$

因此,静止坐标系中的所有推导仍成立.由此得的方程与静止坐标系中的完全一导,只是把体积力强度项 $\boldsymbol{f}_v$ 换成 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{f}_v-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{f}_v-\boldsymbol{a}_e-\boldsymbol{a}_c$.并把所有的坐标与速度都改成相对运动坐标系的坐标与速度.即运动方程可以写成

$$\frac{\mathrm{D}^{(r)}\rho_r}{\mathrm{D}t}+\rho_r\nabla^{(r)}\cdot\boldsymbol{V}_r=0,$$
$$\rho_r\frac{\mathrm{D}^{(r)}\boldsymbol{V}_r}{\mathrm{D}t}=\rho_r\boldsymbol{F}+\nabla^{(r)}\cdot\boldsymbol{P}_r,$$
$$\rho_r\frac{\mathrm{D}^{(r)}E_r}{\mathrm{D}t}=\rho_r\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{V}_r+\nabla^{(r)}\cdot(\boldsymbol{V}_r\cdot\boldsymbol{P}_r)+\rho_r\dot{q}+\nabla^{(r)}\cdot(\kappa\nabla^{(r)}\boldsymbol{T}_r).$$

B)间接法就是先在静止坐标系中写出方程.然后利用坐标变换将方程推广到运动坐标系中.

先将静止坐标系中的动量方程写成

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{f}_v+\nabla\cdot\boldsymbol{P}.$$

这里$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\boldsymbol{a}_a$ 为绝对加速度.将 $\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_c$ 代入上式,并利用$\nabla\cdot\boldsymbol{P}=\nabla^{(r)}\cdot\boldsymbol{P}_r$,得

$$\rho_r \frac{\mathrm{D}^{(r)} \boldsymbol{V}_r}{\mathrm{D}t} = \rho_r \boldsymbol{F} + \nabla^{(r)} \cdot \boldsymbol{P}_r. \tag{1.55}$$

这里

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}_v - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}_v - \boldsymbol{a}_e - \boldsymbol{a}_c.$$

利用基本变换公式,可以很容易地从静止坐标系中的质量守恒方程推得运动坐标系中的方程

$$\frac{\mathrm{D}^{(r)} \rho_r}{\mathrm{D}t} + \rho_r \nabla^{(r)} \cdot \boldsymbol{V}_r = 0. \tag{1.56}$$

能量方程的推导也不复杂.首先必须注意到总能作为标量并不满足客观性原则,它在不同坐标系中是变化的.为了解决这一困难,将$\frac{\mathrm{D}^{(r)} E_r}{\mathrm{D}t}$写成

$$\frac{\mathrm{D}^{(r)} E_r}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}^{(r)} e_r}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}\left(\frac{1}{2} \boldsymbol{V}_r \cdot \boldsymbol{V}_r\right)}{\mathrm{D}t}. \tag{1.57}$$

考虑到密度 ρ 和内能 e 是客观不变量($e_r = e, \rho_r = \rho$),所以

$$\frac{\mathrm{D}^{(r)} \rho_r e_r}{\mathrm{D}t} = \frac{D\rho e}{Dt}.$$

另外,将动量方程(1.55)左右两端点乘相对速度 $\boldsymbol{V}_r$,得

$$\rho_r \frac{\mathrm{D}^{(r)}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{2} \boldsymbol{V}_r \cdot \boldsymbol{V}_r\right) = \rho_r \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{V}_r + (\nabla^{(r)} \cdot \boldsymbol{P}_r) \cdot \boldsymbol{V}_r. \tag{1.58}$$

另外,由前面推导的内能方程

$$\rho \frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = \nabla \boldsymbol{V} : \boldsymbol{P} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \rho \dot{q}.$$

加上基本变换公式得

$$\rho_r \frac{\mathrm{D}^{(r)} e_r}{\mathrm{D}t} = \nabla^{(r)} \boldsymbol{V}_r : \boldsymbol{P}_r + \nabla^{(r)} \cdot (\kappa \nabla^{(r)} T_r) + \rho_r \dot{q}. \tag{1.59}$$

将方程(1.59)与(1.58)相加,并注意到(1.57),便得能量方程

$$\rho_r \frac{\mathrm{D}^{(r)} E_r}{\mathrm{D}t} = \rho_r \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{V}_r + \nabla^{(r)} \cdot (\boldsymbol{V}_r \cdot \boldsymbol{P}_r) + \rho_r \dot{q} + \nabla^{(r)} \cdot (\kappa \nabla^{(r)} T).$$

1.3.4 直角坐标系和柱坐标系中微分方程的分量形式

将流体力学方程写成如下的向量形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0, \tag{1.60}$$

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V} \boldsymbol{V}) = \rho \boldsymbol{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{P}, \tag{1.61}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V} E) = \rho \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{V} + \nabla \cdot (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{P}) + \rho \dot{q} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \tag{1.62}$$

如果是运动坐标系,则上述方程中的体积力包含惯性力项.

上面的方程形式与坐标系无关.将速度分量、散度等展开成分量形式时,需要用到具

体坐标系中的分量与散度表达式.

1)直角(笛卡尔)坐标系(x,y,z).此时速度的三个分量记为(u,v,w).任意向量$\boldsymbol{\phi}$的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}=\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2}{\partial y}+\frac{\partial\phi_3}{\partial z}.$$

于是方程的分量形式可以写成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}=0,\tag{1.63}$$

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t}+\frac{\partial\rho uu}{\partial x}+\frac{\partial\rho vu}{\partial y}+\frac{\partial\rho wu}{\partial z}=\rho F_1+\frac{\partial P_{11}}{\partial x}+\frac{\partial P_{12}}{\partial y}+\frac{\partial P_{13}}{\partial z},\tag{1.64}$$

$$\frac{\partial\rho v}{\partial t}+\frac{\partial\rho uv}{\partial x}+\frac{\partial\rho vv}{\partial y}+\frac{\partial\rho wv}{\partial z}=\rho F_2+\frac{\partial P_{21}}{\partial x}+\frac{\partial P_{22}}{\partial y}+\frac{\partial P_{23}}{\partial z},\tag{1.65}$$

$$\frac{\partial\rho w}{\partial t}+\frac{\partial\rho uw}{\partial x}+\frac{\partial\rho vw}{\partial y}+\frac{\partial\rho uw}{\partial z}=\rho F_3+\frac{\partial P_{31}}{\partial x}+\frac{\partial P_{32}}{\partial y}+\frac{\partial P_{33}}{\partial z},\tag{1.66}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho E}{\partial t}+\frac{\partial\rho uE}{\partial x}+\frac{\partial\rho vE}{\partial y}+\frac{\partial\rho wE}{\partial z}=&\ \rho(uF_1+vF_2+wF_3)+\rho q\\&+\frac{\partial}{\partial x}\left(uP_{11}+vP_{12}+wP_{13}+\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)\\&+\frac{\partial}{\partial y}\left(uP_{21}+vP_{22}+wP_{23}+\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)\\&+\frac{\partial}{\partial z}\left(uP_{31}+vP_{32}+wP_{33}+\kappa\frac{\partial T}{\partial z}\right).\end{aligned}\tag{1.67}$$

2)柱坐标系(r,θ,z).此时速度的三个分量记为(V_r,V_θ,V_z).任意向量$\boldsymbol{\phi}$和张量$\boldsymbol{Q}$ $(=\boldsymbol{P},\rho\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{V})$的散度分别为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}=\frac{1}{r}\frac{\partial r\phi_1}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi_3}{\partial z},$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{Q}=&\left(\frac{1}{r}\frac{\partial rQ_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial Q_{rz}}{\partial z}-\frac{Q_{\theta\theta}}{r}\right)\boldsymbol{e}_r\\&+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial rQ_{\theta r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial z}+\frac{Q_{\theta r}}{r}\right)\boldsymbol{e}_\theta\\&+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial rQ_{zr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_{z\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial Q_{zz}}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_z.\end{aligned}$$

于是方程的分量形式可以写成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial\, r\rho V_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho V_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\rho V_z}{\partial z}=0,\tag{1.68}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho V_r}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial r\rho V_rV_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho V_\theta V_r}{\partial\theta}+\frac{\partial\rho V_zV_r}{\partial z}\\&=\frac{\rho V_\theta^2}{r}+\rho F_r+\frac{1}{r}\frac{\partial rP_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial P_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial P_{rz}}{\partial z}-\frac{P_{\theta\theta}}{r},\end{aligned}\tag{1.69}$$

$$\frac{\partial\rho V_\theta}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial r\rho V_rV_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho V_\theta V_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\rho V_zV_\theta}{\partial z}$$

$$= -\frac{\rho V_r V_\theta}{r} + \rho F_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial r P_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{P_{r\theta}}{r}, \qquad (1.70)$$

$$\frac{\partial \rho V_z}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r\rho V_r V_z}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \rho V_\theta V_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho V_z V_z}{\partial z}$$

$$= \rho F_z + \frac{1}{r}\frac{\partial r P_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}, \qquad (1.71)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r\rho V_r E}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \rho V_\theta E}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho V_z E}{\partial z}$$

$$= \rho(V_r F_r + V_\theta F_\theta + V_z F_z) + \rho q$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(V_r P_{rr} + V_\theta P_{r\theta} + V_z P_{rz} + \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[V_r P_{\theta r} + V_\theta P_{\theta\theta} + V_z T_{\theta z} + \kappa_r \frac{\partial T}{\partial \theta} \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(V_r P_{zr} + V_\theta P_{z\theta} + V_z P_{zz} + \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right). \qquad (1.72)$$

在柱坐标系下,有一种特殊的流动,称为轴对称流动,即所有物理量对 θ 的偏导数为0.进一步如果 $V_\theta = 0$,则称为二维轴对称流动,相应的方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r\rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} = 0, \qquad (1.73)$$

$$\frac{\partial \rho V_r}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r\rho V_r V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_z V_r}{\partial z} = \rho F_r + \frac{1}{r}\frac{\partial r P_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial P_{rz}}{\partial z}, \qquad (1.74)$$

$$\frac{\partial \rho V_z}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r\rho V_r V_z}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_z V_z}{\partial z} = \rho F_z + \frac{1}{r}\frac{\partial r P_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}, \qquad (1.75)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r\rho V_r E}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_z E}{\partial z} = \rho(V_r F_r + V_z F_z) + \rho q \qquad (1.76)$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(V_r P_{rr} + V_z P_{rz} + \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(V_r P_{zr} + V_z P_{zz} + \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right). \qquad (1.77)$$

利用同样道理,读者不难将球坐标系中的方程写出来.

计算用的方程需要用到计算坐标系,它可以是任意曲线坐标系,而且坐标可以随时间变化.计算坐标系中的方程将在第二章介绍,在第三章分析.

参 考 文 献

[1] G. K. Batchelor, An introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1967; G. K. 巴切勒,流体动力学引论,沈青、贾复译,科学出版社,1997.

[2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics (2nd edition), Butterworth and Heinemann, 1987 (also available from Beijing World Publishing Corporation, 1999).

[3] B. K. Shivamoggi, Theoretical Fluid Dynamics, John Wiley & Sons, Inc., 1998

[4] 吴介之、马晖扬、周明德,涡动力学引论,高等教育出版社,1993.

[5] 吴介之,流体力学的基本过程,北京大学出版社,1999.
[6] 吴望一,流体力学,北京大学出版社,1983.
[7] 杨本洛,流体运动的经典分析,科学出版社,1996.
[8] 张兆顺、崔桂香,流体力学,清华大学出版社,1998.

第二章　流体力学方程的计算形式与封闭模型

流体力学基本方程需要写成一些特殊形式才方便构造算法、进行分析和计算，并可能需要补充一些方程或修改方程后才能求解.在连续介质力学范围内，总是存在各种尺度的影响，补充或修改方程的目的就是模拟各种尺度的影响.本章主要介绍 N－S 方程包括 Euler 方程便于求解的各种形式和对方程进行封闭(即构造补充或修正方程)的基本原理.

2.1　欧拉方程与 N－S 方程的计算形式

第一章已经推导了 N－S 方程和欧拉方程.这里从计算流体力学角度来进一步介绍.

2.1.1　物理坐标系下的 N－S 方程

令 ρ 为密度，u, v, w 为速度 $\boldsymbol{V}$ 的三个分量(有时也记为 V_1, V_2, V_3，相应地 x, y, z 坐标也记为 x_1, x_2, x_3)，E 为总能，p 为静压，e 为内能，γ 为比热比，对于完全气体，

$$p=(\gamma-1)\rho e, e=E-\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2).$$

以下只考虑完全气体情况.

考虑空间中大小和形状都随时间变化的控制体积 $\Omega(t)$，其以速度 $\boldsymbol{V}_\Sigma$ 运动的边界 $\Sigma(t)$ 的单位外法向矢量记为 $\boldsymbol{n}$.

考虑任一流动参数 $\phi=\phi(x, y, z, t)$(密度、动量各分量、能量等)，它的积分为

$$Q=\int_\Omega \phi \mathrm{d}\Omega.$$

下面的定理读者一般已经很熟悉：

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\int_\Omega \phi_t \mathrm{d}\Omega+\oint_\Sigma \phi \boldsymbol{V}_\Sigma \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\Sigma \text{ (运输定理)},$$

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{V}_\Sigma)\mathrm{d}\Omega=\oint_\Sigma \phi \boldsymbol{V}_\Sigma \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\Sigma \text{ (高斯定理)}.$$

N－S 方程包括质量守恒方程、动量守恒方程与能量守恒方程.

质量守恒定律可以表述为：控制体积中质量的变化率等于通过控制体边界流入的质量流量.写成方程形式为

$$\begin{cases} \underbrace{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_\Omega \rho \mathrm{d}\Omega}_{\text{质量变化率}} = \underbrace{\displaystyle\oint_\Sigma \rho(\boldsymbol{V}_\Sigma-\boldsymbol{V}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\Sigma}_{\text{质量流量}} \end{cases} \tag{2.1}$$

动量守恒定律可以表述为：控制体积中动量的变化率等于通过控制体积边界流入的动量流量，加上由体积力 $\boldsymbol{F}$(重力与惯性力)和表面力 $\boldsymbol{P}$(压力 $-p\boldsymbol{I}$ 与黏性应力 $\boldsymbol{\tau}$)引起的变化. 写成方程形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{V}\mathrm{d}\Omega = \oint_{\Sigma}\rho\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}_{\Sigma}-\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma + \int_{\Omega}\rho\boldsymbol{F}\mathrm{d}\Omega + \oint_{\Sigma}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma. \\ \text{动量变化率}\qquad\qquad \text{动量流量}\qquad\qquad \text{体积力}\qquad \text{面积力}\end{cases} \tag{2.2}$$

能量守恒定律可以表述为：控制体积中能量的变化率等于通过控制体积边界流入的能量流量，加上由体积力 $\boldsymbol{F}$ 和表面力 $\boldsymbol{P}$ 做的功，再加上因热传导引起的变化. 写成方程形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{\Omega}\rho E\mathrm{d}\Omega = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \\ \text{能量变化率}\quad \text{能量流量}\quad \text{体积力功}\quad \text{面积力功}\quad \text{热扩散}\end{cases} \tag{2.3}$$

这里

$$I_1 = \oint_{\Sigma}\rho E(\boldsymbol{V}_{\Sigma}-\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma,$$

$$I_2 = \int_{\Omega}\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}\Omega,$$

$$I_3 = \oint_{\Sigma}\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\Sigma,$$

$$I_4 = -\oint_{\Sigma}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma.$$

体积力 F 一般指的是重力，即 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{g}$. 对于许多问题重力一般可以忽略不计. 在运动坐标系中还可能包含惯性力(第一章). 表面力可以写成

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}.$$

这里 p 为压力，τ_{ij} 为黏性应力.

对于牛顿流体，黏性应力与当地应变率 s_{ij} 成正比，即

$$\tau_{ij} = 2\mu s_{ij} + \lambda\delta_{ij}\nabla\cdot\boldsymbol{V},\ s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right).$$

这里 μ 为黏性系数，$\lambda=-\dfrac{2}{3}\mu$(斯托克斯假设).

最后，由热传导引起的热流量满足傅里叶关系式

$$\boldsymbol{q} = -\kappa\nabla T.$$

这里 κ 为热传导系数，T 为温度. 如果定义 $P_r=\dfrac{c_P\mu}{\kappa}$(称普朗特数，对于常温下的空气 $P_r=0.71$)，则

$$\boldsymbol{q} = -\frac{\mu c_P}{P_r}\nabla T.$$

进一步如果假定定容比热 c_V 为常数，则

$$\boldsymbol{q} = -\frac{\gamma\mu}{P_r}\nabla e.$$

通过令控制体积趋于0,并使用运输定理与高斯定理得可压缩流体N-S方程的微分形式

$$W_t + F_x^{(E)} + G_y^{(E)} + H_z^{(E)} = F_x^{(V)} + G_y^{(V)} + H_z^{(V)} + F. \tag{2.4}$$

这里 $F^{(E)}, G^{(E)}, H^{(E)}$ 为无黏通量, $F^{(V)}, G^{(V)}, H^{(V)}$ 为黏性通量. 将牛顿本构关系代入N-S方程,得

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, F^{(E)} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho u\left(E + \frac{p}{\rho}\right) \end{pmatrix},$$

$$G^{(E)} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho v\left(E + \frac{p}{\rho}\right) \end{pmatrix}, H^{(E)} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho w\left(E + \frac{p}{\rho}\right) \end{pmatrix},$$

$$F^{(V)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x \end{pmatrix},$$

$$G^{(V)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y \end{pmatrix},$$

$$H^{(V)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} - q_z \end{pmatrix}.$$

这里

$$\tau_{xx} = \lambda(u_x + v_y + w_z) + 2\mu u_x,$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu(u_y + v_x),$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu(u_z + w_x),$$
$$\tau_{yy} = \lambda(u_x + v_y + w_z) + 2\mu v_y,$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu(v_z + w_y),$$
$$\tau_{zz} = \lambda(u_x + v_y + w_z) + 2\mu w_z,$$
$$q_x = -\kappa T_x,$$
$$q_y = -\kappa T_y,$$
$$q_z = -\kappa T_z.$$

如果定容比热为常数，则

$$q_x = -\frac{\gamma\mu}{P_r}e_x,$$
$$q_y = -\frac{\gamma\mu}{P_r}e_y,$$
$$q_z = -\frac{\gamma\mu}{P_r}e_z.$$

在 N-S 方程中令 $\mu=0$ 和 $\kappa=0$，则相应的方程称为欧拉方程

$$W_t + F_x^{(E)} + G_y^{(E)} + H_z^{(E)} = F. \tag{2.5}$$

这里 $F^{(E)}, G^{(E)}, H^{(E)}$ 为通量函数

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, F^{(E)} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho u(E + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix},$$

$$G^{(E)} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho v(E + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix}, H^{(E)} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho w(E + \frac{p}{\rho}) \end{pmatrix}.$$

2.1.2　计算坐标系下的方程

在计算过程中，经常采用计算坐标系 (τ, ξ, η, ζ). 计算坐标系 (τ, ξ, η, ζ) 与直角坐标系 (t, x, y, z) 之间的对应关系为

$$\tau = t,$$
$$\xi = \xi(t, x, y, z),$$
$$\eta = \eta(t, x, y, z),$$
$$\zeta = \zeta(t, x, y, z).$$

显然有如下微分关系式

$$x_x = x_\xi \xi_x + x_\eta \eta_x + x_\zeta \zeta_x = 1,$$

$$
\begin{aligned}
y_x &= y_\xi \xi_x + y_\eta \eta_x + y_\zeta \zeta_x = 0, \\
z_x &= z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x + z_\zeta \zeta_x = 0, \\
x_y &= x_\xi \xi_y + x_\eta \eta_y + x_\zeta \zeta_y = 0, \\
y_y &= y_\xi \xi_y + y_\eta \eta_y + y_\zeta \zeta_y = 1, \\
z_y &= z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y + z_\zeta \zeta_y = 0, \\
x_z &= x_\xi \xi_z + x_\eta \eta_z + x_\zeta \zeta_z = 0, \\
y_z &= y_\xi \xi_z + y_\eta \eta_z + y_\zeta \zeta_z = 0, \\
z_z &= z_\xi \xi_z + z_\eta \eta_z + z_\zeta \zeta_z = 1.
\end{aligned}
$$

令 J 为坐标变换的雅可比，即

$$
J = \det\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}\right) = x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) + x_\eta(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi).
$$

则解上面的微分关系式得

$$
\begin{aligned}
\xi_x &= J^{-1}(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta), \\
\xi_y &= J^{-1}(z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta), \\
\xi_z &= J^{-1}(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta), \\
\eta_x &= J^{-1}(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta), \\
\eta_y &= J^{-1}(z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta), \\
\eta_z &= J^{-1}(x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta), \\
\zeta_x &= J^{-1}(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi), \\
\zeta_y &= J^{-1}(z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi), \\
\zeta_z &= J^{-1}(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi), \\
\xi_t &= -\xi_x x_t - \xi_y y_t - \xi_z z_t, \\
\eta_t &= -\eta_x x_t - \eta_y y_t - \eta_z z_t, \\
\zeta_t &= -\zeta_x x_t - \zeta_y y_t - \zeta_z z_t.
\end{aligned}
$$

设直角坐标系(t, x, y, z)下的方程为

$$
W_t + F_x^{(E)} + G_y^{(E)} + H_z^{(E)} = F_x^{(V)} + G_y^{(V)} + H_z^{(V)} + F. \tag{2.6}
$$

则在计算坐标系下，方程可以写成如下守恒形式(Viviand, 1974)

$$
\overline{W}_\tau + \overline{F}_\xi^{(E)} + \overline{G}_\eta^{(E)} + \overline{H}_\zeta^{(E)} = \overline{F}_\xi^{(V)} + \overline{G}_\eta^{(V)} + \overline{H}_\zeta^{(V)} + JF. \tag{2.7}
$$

这里

$$
\begin{aligned}
\overline{W} &= JW, \\
\overline{F}^{(E)} &= J(\xi_t W + \xi_x F^{(E)} + \xi_y G^{(E)} + \xi_z H^{(E)}), \\
\overline{G}^{(E)} &= J(\eta_t W + \eta_x F^{(E)} + \eta_y G^{(E)} + \eta_z H^{(E)}), \\
\overline{H}^{(E)} &= J(\zeta_t W + \zeta_x F^{(E)} + \zeta_y G^{(E)} + \zeta_z H^{(E)}), \\
\overline{F}^{(V)} &= J(\xi_x F^{(V)} + \xi_y G^{(V)} + \xi_z H^{(V)}), \\
\overline{G}^{(V)} &= J(\eta_x F^{(V)} + \eta_y G^{(V)} + \eta_z H^{(V)}),
\end{aligned}
$$

$$\overline{H}^{(V)} = J(\zeta_x F^{(V)} + \zeta_y G^{(V)} + \zeta_z H^{(V)}).$$

为了方便,定义下面的混合雅可比矩阵

$$N_1 = \frac{\mathrm{d}\overline{F}}{\mathrm{d}\overline{W}} = \xi_t I + \xi_x A + \xi_y B + \xi_z C,$$

$$N_2 = \frac{\mathrm{d}\overline{G}}{\mathrm{d}\overline{W}} = \eta_t I + \eta_x A + \eta_y B + \eta_z C,$$

$$N_3 = \frac{\mathrm{d}\overline{H}}{\mathrm{d}\overline{W}} = \zeta_t I + \zeta_x A + \zeta_y B + \zeta_z C.$$

这里 I 为单位矩阵.黏性通量 $F^{(V)}, G^{(V)}, H^{(V)}$所含偏微分可按下面方式计算:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x + u_\zeta \zeta_x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y + u_\zeta \zeta_y,$$

$$u_z = u_\xi \xi_z + u_\eta \eta_z + u_\zeta \zeta_z,$$

$$v_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x + v_\zeta \zeta_x,$$

$$\vdots$$

注意,在曲面 $\xi=\text{const.}$上,法线方向由(ξ_x, ξ_y, ξ_z)给出;在曲面 $\eta=\text{const.}$上,法线方向由(η_x, η_y, η_z)给出;在曲面 $\zeta=\text{const.}$上,法线方向由$(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$给出.

Viviand 采用的是试探法来获得上述守恒形式的.其实也可以从其他思路证明.例如,可以将偏微分方程写成积分形式,利用积分形式的方程便可以推导任意坐标系下的守恒方程.

设所求方程的微分形式为

$$W_t + \nabla \cdot \boldsymbol{\Phi} = F. \tag{2.8}$$

这里

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Phi} = \frac{\partial(F^{(E)} - F^{(V)})}{\partial x} + \frac{\partial(G^{(E)} - G^{(V)})}{\partial y} + \frac{\partial(H^{(E)} - H^{(V)})}{\partial z}.$$

考虑封闭区域 Ω.它可以是任意四边形或六面体.对偏微分方程(2.8)进行积分得

$$\int_\Omega W_t \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{\Phi} \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega F \mathrm{d}\Omega. \tag{2.9}$$

使用高斯定理,式(2.9)变为

$$\int_\Omega W_t \mathrm{d}\Omega + \oint_\Sigma \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\Sigma = \int_\Omega F \mathrm{d}\Omega. \tag{2.10}$$

这里 Σ 为Ω 的边界.如果 Ω 随时间变化,其边界 Σ 速度为$\mathbf{V}_\Sigma$,则(2.10)可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} W \mathrm{d}\Omega + \oint_{\Sigma(t)} \boldsymbol{\Phi}^* \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\Sigma = \int_{\Omega(t)} F \mathrm{d}V. \tag{2.11}$$

这里 $\boldsymbol{\Phi}^* = \boldsymbol{\Phi} - W\,\mathbf{V}_\Sigma$.

然后对上面积分方程中的每一项进行坐标变换.在新的坐标系下将积分方程转化为微分方程,便得所需要的守恒形式.

2.1.3　N－S 方程的展开形式

在计算流体力学方法构造和理论分析中,经常需要用到 N－S 方程的展开形式.为

此,定义雅可比矩阵 $A=\frac{\mathrm{d}F^{(E)}}{\mathrm{d}W}, B=\frac{\mathrm{d}G^{(E)}}{\mathrm{d}W}, C=\frac{\mathrm{d}H^{(E)}}{\mathrm{d}W}, A_x^{(v)}=\frac{\mathrm{d}F^{(V)}}{\mathrm{d}W_x}, A_y^{(v)}=\frac{\mathrm{d}F^{(V)}}{\mathrm{d}W_y}$, $A_z^{(v)}=\frac{\mathrm{d}F^{(V)}}{\mathrm{d}W_z}, B_x^{(v)}=\frac{\mathrm{d}G^{(V)}}{\mathrm{d}W_x}, B_y^{(v)}=\frac{\mathrm{d}G^{(V)}}{\mathrm{d}W_y}, B_z^{(v)}=\frac{\mathrm{d}G^{(V)}}{\mathrm{d}W_z}, C_x^{(v)}=\frac{\mathrm{d}H^{(V)}}{\mathrm{d}W_x}, C_y^{(v)}=\frac{\mathrm{d}H^{(V)}}{\mathrm{d}W_y}$, $C_z^{(v)}=\frac{\mathrm{d}H^{(V)}}{\mathrm{d}W_z}$. 于是 N-S 方程的展开形式为

$$
\begin{aligned}
W_t + AW_x + BW_y + CW_z = & (A_x^{(v)}W_x + A_y^{(v)}W_y + A_z^{(v)}W_z)_x \\
& + (B_x^{(v)}W_x + B_y^{(v)}W_y + B_z^{(v)}W_z)_y \\
& + (C_x^{(v)}W_x + C_y^{(v)}W_y + C_z^{(v)}W_z)_z \\
& + F.
\end{aligned}
$$

为了求雅可比矩阵,把 $m^{(1)}=\rho, m^{(2)}=\rho u, m^{(3)}=\rho v, m^{(4)}=\rho w$ 和 $m^{(5)}=\rho E$ 看成独立变量,则有下面的关系式

$$
W = \begin{bmatrix} m^{(1)} \\ m^{(2)} \\ m^{(3)} \\ m^{(4)} \\ m^{(5)} \end{bmatrix},
$$

$$
p = (\gamma - 1)\left[m^{(5)} - \frac{1}{2m^{(1)}}(m^{(2)}m^{(2)} + m^{(3)}m^{(3)} + m^{(4)}m^{(4)}) \right],
$$

$$
F^{(E)} = \begin{bmatrix} m^{(2)} \\ \frac{1}{m^{(1)}}m^{(2)}m^{(2)} + p \\ \frac{1}{m^{(1)}}m^{(2)}m^{(3)} \\ \frac{1}{m^{(1)}}m^{(2)}m^{(4)} \\ \frac{1}{m^{(1)}}m^{(2)}m^{(5)} + \frac{1}{m^{(1)}}m^{(2)}p \end{bmatrix},
$$

$$
G^{(E)} = \begin{bmatrix} m^{(3)} \\ \frac{1}{m^{(1)}}m^{(3)}m^{(2)} \\ \frac{1}{m^{(1)}}m^{(3)}m^{(3)} + p \\ \frac{1}{m^{(1)}}m^{(3)}m^{(4)} \\ \frac{1}{m^{(1)}}m^{(3)}m^{(5)} + \frac{1}{m^{(1)}}m^{(3)}p \end{bmatrix},
$$

$$
H^{(E)}=\begin{pmatrix} m^{(4)} \\ \frac{1}{m^{(1)}}m^{(4)}m^{(2)} \\ \frac{1}{m^{(1)}}m^{(4)}m^{(3)}+p \\ \frac{1}{m^{(1)}}m^{(4)}m^{(4)} \\ \frac{1}{m^{(1)}}m^{(4)}m^{(5)}+\frac{1}{m^{(1)}}m^{(4)}p \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{xx}&=\frac{\lambda}{\rho}(m_x^{(2)}+m_y^{(3)}+m_z^{(4)})+2\nu m_x^{(2)}\\
&\quad-\frac{\lambda}{\rho}(um_x^{(1)}+vm_y^{(1)}+wm_z^{(1)})-2\nu um_x^{(1)},\\
\tau_{xy}&=\tau_{yx}=\nu(m_y^{(2)}+m_x^{(3)})-\nu(um_y^{(1)}+vm_x^{(1)}),\\
\tau_{xz}&=\tau_{zx}=\nu(m_z^{(2)}+m_x^{(4)})-\nu(um_z^{(1)}+wm_x^{(1)}),\\
\tau_{yy}&=\frac{\lambda}{\rho}(m_x^{(2)}+m_y^{(3)}+m_z^{(4)})+2\nu m_y^{(3)}\\
&\quad-\frac{\lambda}{\rho}(um_x^{(1)}+vm_y^{(1)}+wm_z^{(1)})-2\nu vm_y^{(1)},\\
\tau_{yz}&=\tau_{zy}=\nu(m_z^{(3)}+m_y^{(4)})-\nu(vm_z^{(1)}+wm_y^{(1)}),\\
\tau_{zz}&=\frac{\lambda}{\rho}(m_x^{(2)}+m_y^{(3)}+m_z^{(4)})+2\nu m_z^{(4)}\\
&\quad-\frac{\lambda}{\rho}(um_x^{(1)}+vm_y^{(1)}+wm_z^{(1)})-2\nu wm_z^{(1)},\\
q_x&=-\frac{\gamma\nu}{P_r}(-Em_x^{(1)}-um_x^{(2)}-vm_x^{(3)}-wm_x^{(4)}+m_x^{(5)}+|\mathbf{V}|^2m_x^{(1)}),\\
q_y&=-\frac{\gamma\nu}{P_r}(-Em_y^{(1)}-um_y^{(2)}-vm_y^{(3)}-wm_y^{(4)}+m_y^{(5)}+|\mathbf{V}|^2m_y^{(1)}),\\
q_z&=-\frac{\gamma\nu}{P_r}(-Em_z^{(1)}-um_z^{(2)}-vm_z^{(3)}-wm_z^{(4)}+m_z^{(5)}+|\mathbf{V}|^2m_z^{(1)}).
\end{aligned}
$$

矩阵 $A=\frac{\mathrm{d}F^{(E)}}{\mathrm{d}W}=(A_{ij})$和 $A_x^{(v)}=\frac{\mathrm{d}F^{(V)}}{\mathrm{d}W_x}=((A_x^{(v)})_{ij})$按下面方式求：

$$
A_{ij}=\frac{\partial F_i^{(E)}}{\partial m^{(j)}},\quad (A_x^{(v)})_{ij}=\frac{\partial F_i^{(V)}}{\partial m_x^{(j)}}.
$$

其他矩阵用同样方式求.由此得雅可比矩阵的详细表达式(记$\bar{\gamma}=\gamma-1$)：

$$
A=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-u^2+\frac{\bar{\gamma}}{2}\mathbf{V}^2 & (3-\gamma)u & -\bar{\gamma}v & -\bar{\gamma}w & \bar{\gamma}\\
-uv & v & u & 0 & 0\\
-uw & w & 0 & u & 0\\
-u[\gamma E-\bar{\gamma}\mathbf{V}^2] & \gamma E-\frac{\bar{\gamma}}{2}(\mathbf{V}^2+2u^2) & -\bar{\gamma}uv & -\bar{\gamma}uw & \gamma u
\end{pmatrix},
$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -vu & v & u & 0 & 0 \\ -v^2 + \frac{\bar{\gamma}}{2}\mathbf{V}^2 & -\bar{\gamma}u & (3-\gamma)v & -\bar{\gamma}w & \bar{\gamma} \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ -v[\gamma E - \bar{\gamma}\mathbf{V}^2] & -\bar{\gamma}uv & \gamma E - \frac{\bar{\gamma}}{2}(\mathbf{V}^2 + 2v^2) & -\bar{\gamma}vw & \gamma v \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & w & 0 & u & 0 \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ -w^2 + \frac{\bar{\gamma}}{2}\mathbf{V}^2 & -\bar{\gamma}u & -\bar{\gamma}v & (3-\gamma)w & \bar{\gamma} \\ -w[\gamma E - \bar{\gamma}\mathbf{V}^2] & -\bar{\gamma}uw & -\bar{\gamma}vw & \gamma E - \frac{\bar{\gamma}}{2}(\mathbf{V}^2 + 2w^2) & \gamma w \end{pmatrix},$$

$$A_x^{(v)} = \frac{\mu}{\rho}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}u & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Theta_a & \alpha_u u & \alpha_v v & \alpha_w w & \frac{\gamma}{Pr} \end{pmatrix},$$

$$A_y^{(v)} = \frac{\mu}{\rho}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}v & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}uv & v & -\frac{2}{3}u & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_z^{(v)} = \frac{\mu}{\rho}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}w & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}uw & w & 0 & -\frac{2}{3}u & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_x^{(v)} = \frac{\mu}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}u & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}vu & -\frac{2}{3}v & u & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_y^{(v)} = \frac{\mu}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}v & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Theta_b & \beta_u u & \beta_v v & \beta_w w & \frac{\gamma}{Pr} \end{bmatrix},$$

$$B_z^{(v)} = \frac{\mu}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}w & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}vw & 0 & w & -\frac{2}{3}v & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_x^{(v)} = \frac{\mu}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}u & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}wu & -\frac{2}{3}w & 0 & u & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_y^{(v)} = \frac{\mu}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3}v & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}wv & 0 & -\frac{2}{3}w & v & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_z^{(v)}=\frac{\mu}{\rho}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\-u&1&0&0&0\\-v&0&1&0&0\\-\frac{4}{3}w&0&0&\frac{4}{3}&0\\\Theta_c&\gamma_u u&\gamma_v v&\gamma_w w&\frac{\gamma}{Pr}\end{bmatrix}.$$

这里

$$\Theta_a=-\frac{\gamma}{Pr}E-\alpha_u u^2-\alpha_v v^2-\alpha_w w^2;$$

$$\Theta_b=-\frac{\gamma}{Pr}E-\beta_u u^2-\beta_v v^2-\beta_w w^2;$$

$$\Theta_c=-\frac{\gamma}{Pr}E-\gamma_u u^2-\gamma_v v^2-\gamma_w w^2;$$

$$\alpha_u=\frac{4}{3}-\frac{\gamma}{Pr},\alpha_v=1-\frac{\gamma}{Pr},\alpha_w=1-\frac{\gamma}{Pr};$$

$$\beta_u=1-\frac{\gamma}{Pr},\beta_v=\frac{4}{3}-\frac{\gamma}{Pr},\beta_w=1-\frac{\gamma}{Pr};$$

$$\gamma_u=1-\frac{\gamma}{Pr},\gamma_v=1-\frac{\gamma}{Pr},\gamma_w=\frac{4}{3}-\frac{\gamma}{Pr}.$$

2.1.4 方程的基本变量形式与对角化

前面介绍的N-S方程以 $W=(\rho,\rho u,\rho v,\rho w,\rho E)^t$ 作为因变量.因针对 W 构造的方程称为守恒方程,所以 W 也称为守恒变量.对于可压缩流体力学问题,标准的计算流体力学方法一般以守恒变量作为未知数.但以守恒变量定义的雅可比矩阵特别复杂,不容易求特征值和将方程对角化.而雅可比矩阵的特征值和对角化在计算流体力学中具有重要作用(第三章、第四章).为了简化需要用到其他变量定义的N-S方程.

最方便的变量是基本变量

$$U=(p,u,v,w,T)^T,V=(p,u,v,w,S)^T.$$

为了方程或矩阵之间的变换,需要用到如下的变量变换关系

$$\frac{dU}{dW}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-\frac{u}{\rho}&\frac{1}{\rho}&0&0&0\\-\frac{v}{\rho}&0&\frac{1}{\rho}&0&0\\-\frac{w}{\rho}&0&0&\frac{1}{\rho}&0\\\frac{1}{\rho c_V}(q^2-E)&-\frac{1}{\rho c_V}u&-\frac{1}{\rho c_V}v&-\frac{1}{\rho c_V}w&\frac{1}{\rho c_V}\end{bmatrix},$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\\frac{\bar{\gamma}}{\gamma}\frac{T}{p}&0&0&0&-\frac{1}{\gamma}\frac{T}{p}\end{bmatrix},$$

$$A_V=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a^2}&0&0&0&-\frac{1}{a^2}\\\frac{u}{a^2}&\rho&0&0&-\frac{u}{a^2}\\\frac{v}{a^2}&0&\rho&0&-\frac{v}{a^2}\\\frac{w}{a^2}&0&0&\rho&-\frac{w}{a^2}\\\frac{1}{\gamma}+\frac{M^2}{2}&\rho u&\rho v&\rho w&-\frac{M^2}{2}\end{bmatrix},$$

$$A_V^{-1}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}W}=\begin{bmatrix}\frac{\gamma}{2}q^2&(1-\gamma)u&(1-\gamma)v&(1-\gamma)w&\bar{\gamma}\\-\frac{u}{\rho}&\frac{1}{\rho}&0&0&0\\-\frac{v}{\rho}&0&\frac{1}{\rho}&0&0\\-\frac{w}{\rho}&0&0&\frac{1}{\rho}&0\\\frac{\bar{\gamma}}{2}q^2-a^2&(1-\gamma)u&(1-\gamma)v&(1-\gamma)w&\gamma\end{bmatrix}.$$

这里$\bar{\gamma}=\gamma-1$，$q^2=u^2+v^2+w^2$，$a=\sqrt{\gamma p/\rho}$为音速.

由第一章知熵方程可以写成

$$\rho T\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}=\Phi+\nabla\cdot(\kappa\nabla T).$$

为了得到压力方程，将质量守恒方程写成

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\nabla\cdot\mathbf{V}=0.$$

由熵的定义$\left(S=c_V\ln\frac{p}{\rho^\gamma}\right)$得

$$\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}=a^2\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\frac{p}{c_V}\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}.$$

因此，压力方程为

$$\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}=-\rho a^2\nabla\cdot\mathbf{V}+(\gamma-1)[\Phi+\nabla\cdot(\kappa\nabla T)].$$

用第一章介绍的动量方程和温度方程(1.51)，可以将以 U 为因变量的方程写成(令

黏性系数、热传导系数与比热为常数)

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}+\rho a^2\frac{\partial u}{\partial x}+\rho a^2\frac{\partial v}{\partial y}+\rho a^2\frac{\partial w}{\partial z}=(\gamma-1)[\Phi+\nabla\cdot(k\nabla T)], \tag{2.12}$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}+\rho w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \tag{2.13}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}+\rho w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial_y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \tag{2.14}$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho u\frac{\partial w}{\partial x}+\rho v\frac{\partial w}{\partial y}+\rho w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \tag{2.15}$$

$$\rho\frac{\partial T}{\partial t}+\rho u\frac{\partial T}{\partial x}+\rho v\frac{\partial T}{\partial y}+\rho w\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{\kappa}{\rho c_V}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\kappa}{\rho c_V}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\kappa}{\rho c_V}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-\frac{1}{\rho c_V}p\nabla\cdot\boldsymbol{V}+\frac{1}{\rho c_V}\Phi. \tag{2.16}$$

这里Φ为耗散函数

$$\Phi=\mu\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{2}{3}\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right].$$

为了获得对角化矩阵的统一形式,定义投影到某方向 $\boldsymbol{n}=(n_x,n_y,n_z)$的通量函数

$$F_n=F^{(E)}n_x+G^{(E)}n_y+H^{(E)}n_z.$$

相应的雅可比矩阵的投影为

$$N=\frac{\mathrm{d}F_n}{\mathrm{d}\boldsymbol{W}}=An_x+Bn_y+Cn_z.$$

下面求对角化矩阵 P^{-1}和 P,使 $P^{-1}NP$ 成为对角矩阵.为此只需考虑欧拉方程.对应的压力和熵方程可以分别写成

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}+\rho a^2\frac{\partial u}{\partial x}+\rho a^2\frac{\partial v}{\partial y}+\rho a^2\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

$$\rho\frac{\partial S}{\partial t}+\rho u\frac{\partial S}{\partial x}+\rho v\frac{\partial S}{\partial y}+\rho w\frac{\partial S}{\partial z}=0.$$

因此,以 V 为因变量的方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}+\rho a^2\frac{\partial u}{\partial x}+\rho a^2\frac{\partial v}{\partial y}+\rho a^2\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{2.17}$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}+\rho w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial x}=0, \tag{2.18}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}+\rho w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial y}=0, \tag{2.19}$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho u\frac{\partial w}{\partial x}+\rho v\frac{\partial w}{\partial y}+\rho w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}=0, \tag{2.20}$$

$$\rho \frac{\partial S}{\partial t} + \rho u \frac{\partial S}{\partial x} + \rho v \frac{\partial S}{\partial y} + \rho w \frac{\partial S}{\partial z} = 0.$$

即

$$V_t + A_p V_x + B_p V_y + C_p V_z = 0. \tag{2.21}$$

这里

$$A_p = \begin{pmatrix} u & \rho a^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$B_p = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho a^2 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix},$$

$$C_p = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & \rho a^2 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}.$$

因此

$$N_p = A_p n_x + B_p n_y + C_p n_z = \begin{pmatrix} V_n & \rho a^2 n_x & \rho a^2 n_y & \rho a^2 n_z & 0 \\ \frac{1}{\rho} n_x & V_n & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} n_y & 0 & V_n & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} n_z & 0 & 0 & V_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V_n \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

很容易求出 N_p 的特征值为

$$\lambda_+ = V_n + a, \quad \lambda_- = V_n - a, \quad \lambda_0 = V_n.$$

其中 λ_0 为三重根，$a = \sqrt{\gamma p / \rho}$ 为音速.

令

$$N_p = L \Lambda_N L^{-1},$$

这里

$$\Lambda_N = \mathrm{diag}(\lambda_0, \lambda_0, \lambda_0, \lambda_+, \lambda_-).$$

求对角化矩阵的基本原理在第三章中会进行更详细介绍.对应每个特征值,求出 N_p 的左特征矢量.一共有5个线性无关的左特征矢量.把它们作为行矢量,便得 L^{-1}.对应每个特征值,求出 N_p 的右特征矢量.一共有5个线性无关的右特征矢量.把它们作为列矢量,便得 L.进行适当标准化后,得对角化矩阵的具体表达式

$$L^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -n_y & n_x & 0 & n_z \\ 0 & -n_z & 0 & n_x & -n_y \\ 0 & 0 & -n_z & n_y & n_x \\ \phi_+(\lambda_+-V_n) & \phi_+\rho a^2 n_x & \phi_+\rho a^2 n_y & \phi_+\rho a^2 n_z & 0 \\ \phi_-(\lambda_- -V_n) & \phi_-\rho a^2 n_x & \phi_-\rho a^2 n_y & \phi_-\rho a^2 n_z & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho(\lambda_+-V_n)\psi_+ & \rho(\lambda_--V_n)\psi_- \\ -n_y & -n_z & 0 & n_x\psi_+ & n_x\psi_- \\ n_x & 0 & -n_z & n_y\psi_+ & n_y\psi_- \\ 0 & n_x & n_y & n_z\psi_+ & n_z\psi_- \\ n_z & -n_y & n_x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

$$\phi_+=\psi_+=\frac{1}{\sqrt{\rho(\lambda_+-V_n)^2+\rho a^2}},$$

$$\phi_-=\psi_-=\frac{1}{\sqrt{\rho(\lambda_--V_n)^2+\rho a^2}}.$$

现在将上述方程转换到守恒变量 W 上.将(2.21)乘以 A_V,便得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{W}_t+A\boldsymbol{W}_x+B\boldsymbol{W}_y+C\boldsymbol{W}_z=0, \\ &A=A_VA_pA_V^{-1}, \\ &B=A_VB_pA_V^{-1}, \\ &C=A_VC_pA_V^{-1}. \end{aligned}$$

于是可以按 $P^{-1}=L^{-1}A_V^{-1}$ 和 $P=A_VL$ 得 N 的对角化矩阵.由相似变换矩阵特征值的不变性,矩阵 N 的五个特征值(含三重根)为

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}+a,\quad \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}-a.$$

设 P 为 N 的对角化矩阵,即

$$P^{-1}NP=\mathrm{diag}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n},\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n},\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n},\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}+a,\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}-a).$$

定义

$$\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{V}^2}{2}\boldsymbol{n}+\rho(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{n}),\boldsymbol{B}_0=(1-\frac{\overline{\gamma}}{2}M^2)\boldsymbol{n}-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{n},\boldsymbol{C}_\pm=\pm\frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}-\frac{\overline{\gamma}}{\rho a}\boldsymbol{V}.$$

和当地马赫数[①] $M=|\boldsymbol{V}|/a$,按上面方法得到的对角化矩阵为

---

① 用马赫数可以定义不同类型的流动,如亚音速流动($M<1$),超音速流动($M>1$),跨音速流动($M\approx1$).见第一章.

$$
P^{-1}=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{e}_x & \bar{\gamma}\dfrac{u}{a^2}n_x & \bar{\gamma}\dfrac{v}{a^2}n_x+\dfrac{n_z}{\rho} & \bar{\gamma}\dfrac{w}{a^2}n_x-\dfrac{n_y}{\rho} & -\dfrac{\bar{\gamma}}{a^2}n_x \\
\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{e}_y & \bar{\gamma}\dfrac{u}{a^2}n_y-\dfrac{n_z}{\rho} & \bar{\gamma}\dfrac{v}{a^2}n_y & \bar{\gamma}\dfrac{w}{a^2}n_y+\dfrac{n_x}{\rho} & -\dfrac{\bar{\gamma}}{a^2}n_y \\
\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{e}_z & \bar{\gamma}\dfrac{u}{a^2}n_z+\dfrac{n_y}{\rho} & \bar{\gamma}\dfrac{v}{a^2}n_z-\dfrac{n_x}{\rho} & \bar{\gamma}\dfrac{w}{a^2}n_z & -\dfrac{\bar{\gamma}}{a^2}n_z \\
\dfrac{a}{\rho}\left(\dfrac{\bar{\gamma}}{2}M^2-\dfrac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}}{a}\right) & \boldsymbol{C}_+\cdot\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{C}_+\cdot\boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{C}_+\cdot\boldsymbol{e}_z & \dfrac{\bar{\gamma}}{\rho a} \\
\dfrac{a}{\rho}\left(\dfrac{\bar{\gamma}}{2}M^2+\dfrac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}}{a}\right) & \boldsymbol{C}_-\cdot\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{C}_-\cdot\boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{C}_-\cdot\boldsymbol{e}_z & \dfrac{\bar{\gamma}}{\rho a}
\end{pmatrix},
$$

$$
P=\begin{pmatrix}
n_x & n_y & n_z & \dfrac{\rho}{2a} & \dfrac{\rho}{2a} \\
un_x & un_y-\rho n_z & un_z+\rho n_y & \dfrac{\rho}{2a}(u+an_x) & \dfrac{\rho}{2a}(u-an_x) \\
vn_x+\rho n_z & vn_y & vn_z-\rho n_x & \dfrac{\rho}{2a}(v+an_y) & \dfrac{\rho}{2a}(v-an_y) \\
wn_x-\rho n_y & wn_y+\rho n_x & wn_z & \dfrac{\rho}{2a}(w+an_z) & \dfrac{\rho}{2a}(w-an_z) \\
\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_z & \dfrac{\rho}{2a}(H+a\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}) & \dfrac{\rho}{2a}(H-a\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})
\end{pmatrix}.
$$

这里,$H=h+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{V}$ 为总焓.

以上是求对角化矩阵的简便方式.如果直接从守恒方程出发,则计算十分繁琐.

2.2　多尺度问题方程的封闭与模型化处理

2.2.1　多尺度问题的特征

一般的流动问题可能包含多种尺度.我们感兴趣的尺度可能是某种极端尺度或平均尺度,而不是所有尺度.这如同我们考虑一般流体力学问题时不会去考虑个别分子的运动一样.例如,河道弯曲和深浅的变化以及支流入出口和河道宽窄的变化导致河流中不同尺度的流动结构,这些结构的大小和生存周期决定于上述变化的尺度.由于河床的凹凸不平以及河岸的不规则也在河流中引起不同尺度的漩涡(旋涡).渔船、禽类和鱼群的活动引起更小尺度的局部流动.如果要研究河流的宏观运动规律(如季节性变化),则只应该去关心大尺度的变化,不需要去计算河水中的每一个漩涡(即旋涡).研究大气流动时没有必要去考虑每一座房子、每一颗树、每一座山的影响.对于绕飞行器的流动和发动机气缸内的流动,同样存在各种尺度的流动结构.计算所关心的是某种宏观的尺度.

多尺度包含如下几个方面:

1)结构多尺度,主要指湍流问题;

2)相位多尺度,主要指多相流问题;

3)特征多尺度,主要指多速度范围问题;

4)影响多尺度,主要指动力学方程中不同项的影响不同.

首先考虑结构多尺度即湍流问题.烟囱冒出的烟柱首先是直的,各流体微团沿着特定的方向规则地有层次地流动,因此称为层流流动.烟柱到了一定高度就散乱了,成了一种肉眼看来属于无序的、随机的、杂乱无章的流动,称为湍流流动.湍流在某种小的尺度上严格满足流体力学的基本方程即属于有规律的.根据湍流统计理论,小尺度湍流结构存在层次相似律(She & Leveque,1994).在大的尺度上湍流具有多重性:一方面存在某些有序的结构(规律性),另一方面(至少按一般的统计理论)存在无序的变化(无规律性).湍流研究存在两种极端观点:一种观点强调湍流的规律性,另一种观点强调湍流的无规律性.尽管湍流问题属于整个物理学领域最艰难的问题之一,湍流这一名词似乎成了常识性的名词.例如,乘坐飞机时,可能遇到某种气流引起飞机颠簸,此时乘客被告知遇到湍流了.湍流中存在各种尺度的旋涡,在足够小的尺度上湍流属于规则的有序流动,运动规律满足流体力学的基本方程.但从工程应用的角度,我们所关心的是较大的尺度.湍流问题的特点是,各种尺度的流动结构(涡)是相互作用的.大尺度流动结构与湍流的无序运动(脉动)相互作用引起大尺度的旋涡产生,旋涡经过黏性耗散又被削弱,在一定条件下出现某种宏观的平衡.各种尺度的旋涡向更小尺度的旋涡传递能量,并通过大尺度流动输运到其他地方.当旋涡尺度小到一定程度时,分子黏性耗散便起决定作用,因此湍流尺度存在下限(称为Kolmogorov尺度).小尺度旋涡的耗散速度同时也决定大尺度旋涡向其传递能量的速度.因此小尺度旋涡也影响大尺度流动结构.对于工程问题,我们不可能把各种尺度的流动结构都计算出来(既没有这样的计算条件,又无法处理数据),而感兴趣的主要是平均流动,定义平均的时间尺度或空间尺度便是我们感兴趣的尺度,属于一种比较大的尺度.我们在计算较大尺度的流动结构时,必须把小尺度的影响给考虑进来.

对于多相流问题,不同相位的尺度显然不同.多相流就是微观上互不掺混的几种不同类型的流体以某种方式混在一起的流动.气体和液体可以看成不同类型的流体,微观上互不掺混表示气体中的分子不会经扩散跑到液体中去,同理液体中的分子不会经扩散跑到气体中去.但两种不同流体的界面上可以存在相变,如液体汽化变成气体.根据流体数目的大小可以分为两相流、三相流等.两相流主要包括气体与液体、气体与固体、液体与固体、液体与液体的混合流动,可以分别称为气液、气固、液固、液液两相流.根据不同相的比例和分布方式,多相流可以分为两类.在第一类中,不同流体占据的空间区域大小属于同一量级且区域个数为0[1]的量级,不同相位分别满足流体力学的基本方程,相位之间的界面运动也遵循一定的规律.汽车加油时油箱中油与空气的混合运动属于这样一种流动.在第二类中,至少有一相被其他相分割成数目较大的几乎互不相连的区域.例如,汽车发动机中的两相流由连通的气体和相互分散的大量形状较规则(如球形)液滴组成.显然多相流中包含了多种尺度.如相位之间的界面在界面垂直方向的尺度属于微观尺度.又如,气体和大量液滴组成的两相流不同相位的空间尺度差别很大,气体的空间尺度可能是米的量级,而液滴的尺度可能是微米的量级.因此,不同相位需要耦合处理或分别处理.

特征多尺度问题指在不同流速范围内,雅可比矩阵的各特征值之比相距较大.在第三章将看到,不同特征值对应的波不一样,欧拉方程的解可以按特征值分解为不同特征分量的叠加.如果各特征值相距甚远,那么不同特征分量的传播速度不一样.而传播速度又直接影响计算速度和稳定性.特别对于低速问题,最大特征值与最小特征值的比(简称刚度,反比于马赫数)很大.不同刚度的问题计算方法不一样.但对于许多流动,不同区域刚度不一样.因此希望采用适合各种刚度的统一算法.

最后,N-S方程中的不同项(对流项,黏性项,压力项,源项等)的大小可能不一样,可以看成影响多尺度问题.为了体现各项的影响,需要将方程进行无量纲化,将各项的影响尺度通过无量纲参数表现出来.

2.2.2　结构多尺度问题:湍流模拟

2.2.2.1　湍流的形成

湍流只在特定流动条件下出现,对于给定的几何区域,存在一种湍流出现的临界流动条件.由层流向湍流过渡(称为转捩)可以看成流动失稳的结果.给流动某种小扰动(在流场中这种扰动几乎总是存在的),平均流与小扰动作用的结果如果使小扰动减小(衰减),则流动是稳定的;如果使小扰动放大,则流动是不稳定的.

为了获得稳定性的定性概念,考虑小弹球在曲面上的运动.在(指向向下的)重力场中有一个当地法向指向上面的曲面,在曲面上放置一个小弹球.弹球可以在曲面上滚动.

1)令曲面和弹球表面十分光滑.如果曲面是凹面,则给小弹球位置一小扰动后,小弹球在重力作用下必然滚回原点,因此是稳定的.如果曲面是凸的,则任何小扰动将使弹球滚离原点,是不稳定的.这属于线性稳定性问题.

2)令曲面和弹球表面较为粗糙.考虑凸面,则给特别小的扰动,可能因表面粗糙度的存在从而有较大的静摩擦力存在,使弹球卡在扰动位置不动,即对于小扰动是稳定的(线性稳定).如果给的扰动较大,则摩擦力不能抵抗重力,弹球将滚离原点,是不稳定的(非线性不稳定).这属于非线性稳定性问题.

在经典的流动稳定性分析中,设平均流动参数为 $\boldsymbol{\Phi}$,给平均流动小扰动 ϕ',从而瞬时流动参数变为 $\phi=\boldsymbol{\Phi}+\phi'$.显然 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 ϕ 均满足N-S方程.将两者的方程相减,略去高阶小量后,得小扰动 ϕ' 满足的方程.小扰动方程为拟线性方程.在标准的稳定性分析中,考虑谐波型小扰动

$$\phi' = \hat{\phi} e^{-\iota(\xi x+\omega t)}, \iota = \sqrt{-1}.$$

这里 ξ 为波数(一般为实数),ω 为频率(一般为复数 $\omega=\omega_r+\iota\omega_i$).将谐波解代入小扰动方程并添加适当的边界条件,便得下面的代数方程

$$\mathrm{d}(\omega,\xi,\Phi)\hat{\phi} = 0.$$

这里,Φ 为平均流动参数的某种组合,一般为雷诺数 $R_e=UL/\nu$.这里 U 为平均流的某种特征速度,L 为平均流的某种特征长度,ν 为运动学黏性系数.

为了获得非零解,必有

$$\det d(\omega,\xi,\Phi)=0.$$

由此解得

$$\omega=\omega(\xi,\Phi).$$

流动失稳的条件是，存在临界参数 Φ_{cr}，使得当 $\Phi>\Phi_{cr}$ 时，至少对某一波段，频率的虚部满足 $\omega_i>0$. 事实上，如果 $\omega_i>0$，那么

$$\phi'=\hat{\phi}e^{-i(\xi x+\omega t)}=\hat{\phi}e^{-i(\xi x+\omega_r t)}e^{\omega_i t}\sim e^{\omega_i t},$$

将被放大.

流过半无限长平板的黏性流动在雷诺数(以离开平板前沿距离作为特征长度)超过某临界值后，便出现线性不稳定(即对于小扰动不稳定)；圆管中的粘流对于小扰动是稳定的，只有扰动为有限值时，才存在临界雷诺数，超过该雷诺数流动不稳定(非线性不稳定).

以上只是流动稳定性分析的简单概念. 流动稳定性有丰富的理论(包括非线性理论)和研究结果，这里不再介绍. 感兴趣的读者可以参阅文献(Lin,1955;Chandrasekhar,1961;Drazin & Reid,1981;Landau & Lifshitz,1984;是勋刚,1992;Shivamoggi,1998).

流动失稳后如何过渡到湍流，存在一些不同看法. 最近，李存标(Lee,2000)提出了一种全新的转捩机制，但对于湍流模拟，似乎没有必要去关心湍流到底是如何产生的，而是去关心湍流一旦产生，如何去计算它. 往往只有雷诺数超过某一临界值时，才会在流场中某些区域出现湍流. 希望所构造的模型能自动算出层流、湍流及其过渡区域. 但目前很难做到这一点，特别是过渡区域很难模拟. 所幸的是，过渡区域一般特别小，所以模拟精度重要性相对减弱.

在湍流流动中，任何物理量 $\phi^*(\boldsymbol{x},t)$ 均可分解成一个平均量 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 与一个脉动量 $\phi'(\boldsymbol{x},t)$ 的和. 所谓的湍流模拟，就是直接计算平均量，而脉动量对平均量的影响通过简单模型进行近似模拟. 定义雷诺平均(也可以用其他方式定义)：

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\overline{\phi^*}=\frac{1}{\Delta t}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}}\phi^*(\boldsymbol{x},t+t')\mathrm{d}t'.$$

这里 Δt 为某时间周期，与速度的脉动周期相比足够大，与流动的宏观时间尺度相比足够小. 在实验数据处理中，Δt 的确切选取很重要，但在湍流模型中 Δt 并不出现，所以没有必要去在意它的选取.

脉动量影响的模拟一直是困扰计算流体力学的一大难题.

2.2.2.2 雷诺平均方程

令 $N(\rho,V_i^*,p^*)$ 为 N－S 算子，即 $N(\rho,V_i^*,p^*)=0$ 代表 N－S 方程. 这里，ρ 为密度，V_j^* 为速度，p^* 为静压. 另外，令 $N_\rho=0$ 为连续方程的算子形式，$N_{V_j}=0$ 为速度分量 V_j 方程的算子形式. 这里考虑不可压缩流动. 稍后考虑向可压缩流动的推广.

令 $\overline{N(\rho,V_j+V_j',p+p')}=0$ 并利用关系式

$$\overline{\phi'}=\overline{\phi\phi'}=0,$$

$$\overline{\phi}=\phi,$$

$$\overline{a\phi + b\psi} = a\bar{\phi} + b\bar{\psi}(a, b \text{ 为常数}),$$

使得下面的雷诺平均方程

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0, \tag{2.25}$$

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial V_j V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}^{(l)} + \tau_{ij}^{(T)}). \tag{2.26}$$

这里 p 为压力的平均值，$\tau_{ij}^{(l)} = 2\mu s_{ij}$ 为分子黏性应力，$s_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right]$ 为应变率张量，μ 为分子黏性系数，$\tau_{ij}^{(T)} = -\rho\overline{V_j' V_i'}$ 为由湍流脉动引起的雷诺应力张量. 对于三维问题，有六个雷诺应力分量.

例如，考虑平板附面层（因黏性和壁面速度为零的约束，只在靠近壁面很近的一层流动参数变化才较大，称为附面层，而且这种变化主要沿垂直于平板的方向，这里设为 y 方向）方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^*}{\partial x} + \dfrac{\partial v^*}{\partial y} = 0, \\ u^* \dfrac{\partial u^*}{\partial x} + v^* \dfrac{\partial u^*}{\partial y} = \nu \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}, \end{cases} \tag{2.27}$$

把速度分解成平均量与脉动量，代入方程(2.27)得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\left(\dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{\partial v'}{\partial y}\right), \\ (u + u')\dfrac{\partial(u + u')}{\partial x} + (v + v')\dfrac{\partial(u + u')}{\partial y} = \nu \dfrac{\partial^2(u + u')}{\partial y^2}. \end{cases}$$

对上述方程组再取平均，考虑到 $\bar{u} = u, \bar{v} = v, \overline{u'} = \overline{v'} = 0, \overline{uu'} = 0, \overline{vv'} = 0$，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ u \dfrac{\partial u}{\partial x} + v \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\tau. \end{cases} \tag{2.28}$$

这里 $\tau = \mu \dfrac{\partial u}{\partial y} - \rho\overline{u'v'}$. 方程(2.28)称为雷诺平均方程，其中 τ 表达式中的第二项为由脉动速度引起的湍流应力. 往往把湍流应力与粘性应力做类比，即令

$$-\rho\overline{u'v'} = \mu_T \frac{\partial u}{\partial y}.$$

其中 μ_T 为湍流黏性系数，可以与平均参数联系起来.

工程上计算 $\tau_{ij}^{(T)}$ 主要有两种方法，这些方法构成了湍流模拟的中心思想.

第一种方法为雷诺应力运输模型 RSTM(Reynolds Stress Transport Method)（也称为二阶矩封闭模型），对每个分量 $\tau_{ij}^{(T)}$ 都构造一个方程，称为雷诺应力方程. 为了获得雷诺应力方程，令

$$\overline{V_i' N_{V_j} + V_j' N_{V_i}} = 0.$$

通过简单运算，便可以获得 $\tau_{ij}^{(T)}$ 的方程 $N_{ij} = 0$. 雷诺应力方程又包含一些新的需要模拟的项，只是这些新的模拟不需要很高的精度. 例如，对于平板附面层动量方程有

$$\overline{u'(u+u')\frac{\partial(u+u')}{\partial x}}+\overline{u'(v+v')\frac{\partial(u+u')}{\partial y}}=\overline{\nu u'\frac{\partial(u+u')}{\partial y^2}}.$$

展开后得$\overline{u'u'}$的方程(如果使用 y 方向的动量方程,则得$\overline{u'v'}$的方程)

$$u\frac{\partial\overline{u'u'}}{\partial x}+v\frac{\partial\overline{u'u'}}{\partial y}=-2\overline{u'u'}\frac{\partial u}{\partial x}-2\overline{u'v'}\frac{\partial u}{\partial x}-2\overline{u'u'\frac{\partial u'}{\partial x}}-2\overline{u'v'\frac{\partial u'}{\partial x}}+2\overline{\nu u'\frac{\partial^2 u^1}{\partial y^2}}.$$

显然,右端最后三项属于未知的,需要进一步模拟.

第二种方法为 Boussinesgue 涡黏性模型 EVM(Eddy Viscosity Model),即假设雷诺应力与应变率 s_{ij}存在如下的线性关系式(类似于牛顿本构关系式):

$$\tau_{ij}^{(T)}=2\mu_T s_{ij}-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}.$$

这里 μ_T 为湍流黏性系数,$k=\frac{1}{2}\overline{V_i'V_i'}$为湍流动能,$\delta_{ij}$为 Kronecker 函数.最简单的办法就是使用代数模型,即构造 μ_T 与平均量梯度之间的简单代数关系式.另一种方法就是将 μ_T 与某些湍流参数联系起来,这些湍流参数本身也满足运输方程.线性本构关系式对于复杂湍流存在许多不足的地方,此时可以采用非线性关系式(Fu S. et al.,1999).

对于可压缩流动,雷诺平均用起来不方便.例如,如果对于连续方程 $\rho_t^*+(\rho^*V_j^*)x_j=0$ 使用雷诺平均,则得 $\rho_t+(\rho V_j+\overline{\rho'V_j'})x_j=0$,因此需要模拟$\overline{\rho'V_j'}$.

为了使湍流模型更简单,用 Favre 平均(密度加权平均)代替雷诺平均:

$$\phi(x,t)=\widetilde{\phi}^*=\frac{1}{\Delta t\rho}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}}\rho^*\phi^*(x,t+t')\mathrm{d}t'.$$

这里 $\rho=\overline{\rho^*}$为按雷诺平均定义的平均密度.采用新的平均后,连续方程变为下面简单形式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho V_j}{\partial x_j}=0.$$

以后,对密度和压力仍采用雷诺平均,对其他量都使用 Favre 平均.为了简练,用 ρ 和 p 表示雷诺平均密度和压力,用 $V_j,E,T,H,\cdots$表示 Favre 平均速度、总能、温度、总焓等.

用前面类似的办法,得下面的使用了 Boussinesgue 假设的可压缩雷诺平均(Favre 平均)N-S方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho V_j}{\partial x_j}=0,\tag{2.29}$$

$$\frac{\partial\rho V_i}{\partial t}+\frac{\partial\rho V_jV_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}^{(l)}+\tau_{ij}^{(T)}),\tag{2.30}$$

$$\frac{\partial\rho E}{\partial t}+\frac{\partial\rho V_jH}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}[-Q_j+V_i(\tau_{ij}^{(l)}+\tau_{ij}^{(T)})].\tag{2.31}$$

这里

$$\tau_{ij}^{(l)}=2\mu(s_{ij}-\frac{1}{3}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\delta_{ij})\quad(\text{分子黏性应力}),$$

$$\tau_{ij}^{(T)}=2\mu_T(s_{ij}-\frac{1}{3}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\delta_{ij})-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}\quad(\text{湍流黏性应力}),$$

$$Q_j = -(k + \frac{\mu_T c_P}{P_{rT}})\frac{\partial T}{\partial x_j},$$

$$E = e + \frac{1}{2}V_i V_i + k,$$

$$H = h + \frac{1}{2}V_i V_i + k,$$

$$p = \rho RT = (\gamma - 1)\rho e,$$

$$e = c_V T, h = e + p/\rho = c_P T,$$

$$P_{rT} = 0.9.$$

2.2.2.3　$k-\varepsilon$ 模型

定义湍流动能 $k=\frac{1}{2}\overline{V_i'V_i'}$ 和湍流耗散率 $\varepsilon=\nu\overline{\frac{\partial V_i'}{\partial x_k}\frac{\partial V_i'}{\partial x_k}}$.

在前面的雷诺平均方程中,包含湍流动能与湍流黏性系数两个未知数.标准的 $k-\varepsilon$ 模型由下面方程定义(Jones & Launder,1972):

A) 湍流黏性系数.由分子运动论知,分子黏性系数与分子运动平均自由程和分子的平均动能的平方根成正比.把湍流脉动与分子运动进行类比,显然 k/ε 代表湍流的时间尺度,从而 $l=k^{\frac{3}{2}}/\varepsilon$ 代表类似于分子运动平均自由程的空间尺度,因此 $\mu_T\sim l\sqrt{k}$.习惯上,湍流粘性系数按下式定义

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \tag{2.32}$$

也可以通过量纲分析来估计湍流黏性系数的表达式(Landau & Lifshitz,1984).

B) 湍流动能 k 的方程.动能 k 的运输方程可以由雷诺应力方程 $N_{11}=0$、$N_{22}=0$ 和 $N_{33}=0$ 相加得到.其具体形式为

$$\rho\frac{\partial k}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_j + S_k. \tag{2.33}$$

这里 $S_k=P_k-D_k$, $P_k=\tau_{ij}^{(T)}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ 为生成项, $D_k=\rho\varepsilon$ 为耗散项,另外

$$\Gamma_j = -\overline{k'V_j'} - \frac{1}{\rho}\overline{V_j'p'} + \nu_l\frac{\partial k}{\partial x_j}, k' = \frac{1}{2}\sum V_i'V_i',$$

为扩散项.一般假设

$$\Gamma_j = (\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})\frac{\partial k}{\partial x_j}.$$

因此,湍流动能所满足的方程为

$$\rho\frac{\partial k}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}[(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k})\frac{\partial k}{\partial x_j}] + S_k. \tag{2.34}$$

因此,湍流动能方程中只有扩散项需要模拟,因此精度相对较高.

C) 湍流耗散率 ε 的方程. 取 N S 方程的矩,即令 $2\nu\overline{\frac{\partial V_i{}'}{\partial x_j}\frac{\partial N_{V_i}}{\partial x_j}}=0$. 由此得到的方程的右端几乎每一项都是未知数,主要通过量纲分析、直觉与类比模拟,没有多少逻辑推理. 一般采用的形式为

$$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\rho V_j\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}\right]+S_\varepsilon. \tag{2.35}$$

这里 $S_\varepsilon=P_\varepsilon-D_\varepsilon$, $P_\varepsilon=C_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{k}\tau_{ij}^{(T)}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ 为生成项, $D_\varepsilon=C_{\varepsilon2}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}$ 为耗散项. 由于模拟的项较多,所以该方程的精度较低.

D)封闭常数. 将上述模型应用于已经知道解的简单湍流流动问题(均匀湍流的衰减、各向同性湍流、壁面附近的对数率问题等)再加上一些数值考虑,便可以确定湍流模型中的常数. 对于标准的 $k-\varepsilon$ 模型,有

$$C_{\varepsilon1}=1.44, C_{\varepsilon2}=1.92, C_\mu=0.09, \sigma_k=1.0, \sigma_\varepsilon=1.3.$$

N-S方程与 $k-\varepsilon$ 模型方程必须耦合求解. 上面的 $k-\varepsilon$ 模型具有下面的特性:

1) 它可以模拟层流向湍流的转捩(数值计算中要求网格十分密):a)在层流区域, $k-\varepsilon$模型仍然成立,此时 $S_k<0$ 并且 $S_\varepsilon<0$; b)在临界雷诺数附近, $S_k>0$, $S_\varepsilon<0$, 从而湍流黏性系数急剧增加,这表示转捩出现; c)当 k 继续增加时, ε 方程中的生成项占主导地位,使 ε 得到放大,从而使 k 方程中的生成项与耗散项获得平衡,层流向湍流的转捩完成. 但计算中获得的临界雷诺数与实验结果相比有很大区别.

2) 对于低雷诺数(本章末有雷诺数定义)流动,尤其是壁面附近的流动,上述模型要作低雷诺数修正. 最简单的办法是在 μ_T 和 S_ε 的方程中引入衰减函数,可以参阅(Wilcox, 1994). 例如经可压缩性修正后,Hwang & Lin(1998)的低雷诺数模型为

$$\frac{\partial\rho k}{\partial t}+\frac{\partial\rho V_j k}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\nu\frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial x_j}\right)+S_k, \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial\rho\tilde{\varepsilon}}{\partial t}+\frac{\partial\rho V_j\tilde{\varepsilon}}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial x_j}\right]-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\nu\frac{\tilde{\varepsilon}}{k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)+S_\varepsilon. \tag{2.37}$$

这里

$$S_k=\tau_{ij}^{(T)}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}-\rho(\tilde{\varepsilon}+\hat{\varepsilon}),$$

$$S_\varepsilon=C_{\varepsilon1}f_1\frac{\tilde{\varepsilon}}{k}\tau_{ij}^{(T)}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}-C_{\varepsilon2}f_2\rho\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k},$$

$$\tilde{\varepsilon}=\varepsilon-\hat{\varepsilon},$$

$$\hat{\varepsilon}=2\nu\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial y}\right)^2,$$

$$\nu_t=(k^2/\tilde{\varepsilon})C_\mu f_\mu(y_\lambda),$$

$$C_\mu=0.09, C_{\varepsilon1}=1.44, C_{\varepsilon2}=1.92,$$

$$f_\mu=1-\exp(-0.01y_\lambda-0.008y_\lambda^3),$$

$$\sigma_k = 1.4 - 1.1\exp[-(y_\lambda/10)],$$
$$\sigma_\varepsilon = 1.3 - 1.0\exp[-(y_\lambda/10)],$$
$$f_1 = 1, f_2 = 1.$$

这里 $y_\lambda = y/\sqrt{(\nu k/\tilde{\varepsilon})}$，$\sqrt{(\nu k/\tilde{\varepsilon})}$ 为 Taylor 微观尺度，y 到壁面的距离. Hwang-Lin (1998)的低雷诺数模型虽然是针对不可压缩流动到场导出的，但对可压缩流动也能给出较好的结果.

另外，经可压缩性修正后，Launder & Sharma(1974)的低雷诺数模型为

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}[\rho(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k})\frac{\partial k}{\partial x_j}] + S_k, \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial \rho \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}[\rho(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon})\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j}] + S\varepsilon + J. \tag{2.39}$$

这里

$$S_k = \tau_{ij}^{(T)}\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \rho(\tilde{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}),$$

$$S_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\tilde{\varepsilon}}{k}\tau_{ij}^{(T)}\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} f_2 \rho \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k},$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \hat{\varepsilon},$$

$$\hat{\varepsilon} = 2\nu\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial y}\right)^2,$$

$$\nu_t = (k^2/\tilde{\varepsilon})C_\mu f_\mu(R_T),$$

$$C_\mu = 0.09, C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.92,$$

$$f_\mu = \exp\left[-\frac{3.4}{(1+\frac{R_T}{50})^2}\right],$$

$$\sigma_k = 1.4,$$
$$\sigma_\varepsilon = 1.3,$$
$$f_1 = 1,$$
$$f_2 = 1 - 0.3\exp(-R_T^2),$$
$$J = -\mu\nu_t(\Delta|\mathbf{V}|)^2.$$

这里令 $R_T = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}$ 为湍流雷诺数.

3) 该模型属于刚性问题，即存在可能趋于无限大的源项，在数值计算时需要进行特殊处理.

4) 如果令 $\omega = \varepsilon/k$，则上面的两个湍流方程可以结合起来，以获得 ω 的方程. 令 $\mu_T = k/\omega$，则湍流模型可以写成

$$\rho\frac{\partial k}{\partial t} + \rho V_j\frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}[(\mu + \sigma_k\mu_T)\frac{\partial k}{\partial x_j}] + S_k + \text{其他将忽略的项},$$

$$\rho\frac{\partial\omega}{\partial t}+\rho V_j\frac{\partial\omega}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu+\sigma_\omega\mu_T)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right]+S_\omega+\text{其他将忽略的项}.$$

这里

$$S_k=\alpha^*\tau_{ij}^{(T)}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}-\beta^*\rho k\omega,$$

$$S_\omega=\alpha\frac{\omega}{k}\tau_{ij}^{(T)}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}-\beta\rho\omega^2+\sigma_d\frac{\rho}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_j},$$

$$\alpha^*=1,$$

$$\beta^*=C_\mu,$$

$$\alpha=C_{\varepsilon1}-1,$$

$$\beta=C_\mu(C_{\varepsilon2}-1),$$

$$\sigma_k=1/2,$$

$$\sigma_\omega=1/2,$$

$$\sigma_d=0.856.$$

5) 该模型对自由来流的湍流参数并不敏感.在将所有方程进行无量纲化(见本节末)后,一般可以取

$$k_\infty=10^{-6}-10^{-2},(\mu_T)_\infty=10^{-4}-10^{-1}.$$

6) 在固体边界上,一般取 $k=0,\varepsilon=\varepsilon_w=2\nu\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial n}\right)^2$.

2.2.2.4 湍流高级模拟

基于雷诺平均的湍流模型对于一般湍流问题误差较大,湍流计算很难从根本上获得突破.如果有足够的计算条件,可以在更宽尺度上计算湍流,如大涡模拟 LES(Large Eddy Simulation)与直接数值模拟 DNS (Direct Numerical Simulation).

在大涡模拟中,网格划分得足够细,将大于网格尺寸的(非定场)(涡)结构直接算出来,而更小的涡则通过前面类似的方法模拟.与前面的雷诺平均不同,大涡模拟中根据需要直接计算的涡的尺度对 N-S 方程采取某种滤波处理,使得对于大涡方程是"精确的",而小涡的影响会以某种需要模拟的项出现.由于只需要模拟更小的涡,所以精度比前面的雷诺平均方法要高.

在直接模拟中,构造尺寸接近 Kolmogorov 尺度的网格,直接求解原始的非定常 N-S 方程,初始扰动可以通过给随机扰动实现.计算过程自动出现流动线性失稳、层流向湍流过渡的非线性过程和湍流充分发展后的变化.这要求网格尺寸足够小,储存的数据特别多,最后需要进行某种统计处理才能使用.由于计算条件的限制,直接数值模拟方法只对于一些简单小尺寸问题有效.另外,直接数值模拟可以用来计算理想化问题,所获得的数据可以用来研究湍流物理问题和改进湍流模型.

还有一种工程师式直接模拟方法,对于任意复杂问题,将网格按计算条件划分得最细(而不是根据湍流最小尺度),直接使用原始的非定常 N-S 方程进行计算,不使用任何湍

流模型.这实际上类似于大涡模拟,只是小涡的影响不考虑了.

2.2.3　相位多尺度问题:多相流运动模拟

2.2.3.1　界面运动模拟

在任意时刻,如果知道所处位置属于何种流体,便可以确定流体特性.如果在 N-S 方程中考虑了流动特性的变化,便可按单相流问题求解.在初始时刻,不同流体占据的位置是给定的,如果能找到流体分界面(以后简称界面)的位置,便可以确定不同位置不同时刻流体的特性.另外,界面上还存在表面张力,它与界面的形状有关系.有了界面位置和形状,便可在 N-S 方程中添加体现表面张力影响的源项.这里考虑的模型可以用来模拟液滴在气体中的变形、界面的稳定性等.

1. 界面运动方程

先考虑单个界面 $\Gamma_{ab}(t)$,它将属于流体 a 的区域 $\Omega_a(t)$和属于流体 b 的区域 $\Omega_b(t)$分开,由关系式

$$\phi(x,y,z,t)=0$$

定义.对该关系式求微分得

$$\phi_t \mathrm{d}t+\phi_x \mathrm{d}x+\phi_y \mathrm{d}y+\phi_z \mathrm{d}z=0 \Rightarrow \phi_t+\phi_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\phi_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\phi_z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=0.$$

由于界面移动速度等于流体速度,因此

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=w.$$

从而界面满足方程

$$\phi_t+u\phi_x+v\phi_y+w\phi_z=0, \text{即 } \phi_t+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\phi=0. \tag{2.40}$$

如果把 $\phi(x,y,z,t)$视为标量场即在空间逐点定义,并且令 $\phi(x,y,z,t)$为流体质点不变量,即跟随流体质点 ϕ 不变,那么 $\phi(x,y,z,t)$便处处满足方程(2.40).设 $\boldsymbol{n}$ 为界面单位法向矢量,则有 $\nabla\phi=|\nabla\phi|\boldsymbol{n}$,这里 $|\nabla\phi|=\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}$.记界面的移动速度为 $\boldsymbol{F}_\phi=F_\phi\boldsymbol{n}$.于是有

$$\boldsymbol{V}\cdot\nabla\phi=F_\phi\boldsymbol{n}\cdot|\nabla\phi|\boldsymbol{n}=F_\phi|\nabla\phi|.$$

因此方程(2.40)也可以写成

$$\phi_t+F_\phi|\nabla\phi|=0.$$

即界面运动方程属于 Hamilton-Jacobi 类型方程.

如果与连续方程耦合,则上述方程也可以写为

$$(\rho\phi)_t+(\rho u\phi)_x+(\rho v\phi)_y+(\rho w\phi)_z=0. \tag{2.41}$$

如果定义初始条件

$$\begin{cases} \phi(x,y,z,0) < 0 & (x,y,z) \in \Omega_a(0), \\ \phi(x,y,z,0) > 0 & (x,y,z) \in \Omega_b(0), \\ \phi(x,y,z,0) = 0 & (x,y,z) \in \Gamma_{ab}(0), \end{cases} \tag{2.42}$$

那么,通过求方程(2.40),所获得的 $\phi(x,y,z,t)$对任一时刻仍然满足

$$\begin{cases} \phi(x,y,z,t) < 0 & (x,y,z) \in \Omega_a(t), \\ \phi(x,y,z,t) > 0 & (x,y,z) \in \Omega_b(t), \\ \phi(x,y,z,t) = 0 & (x,y,z) \in \Gamma_{ab}(t). \end{cases} \tag{2.43}$$

方程(2.40)可以与 N－S 方程联立求解.上述这种确定界面位置的方法称为等高集方法(Dervieux & Thomasset,1981;Osher & Sethian,1988;Mulder et al.,1992).

如果有 $N>2$ 个流体,分别占据区域 $\Omega_1(t),\Omega_2(t),\ldots,\Omega_N(t)$.任意两个流体 a 和 b 之间的界面为 $\Gamma_{ab}(t)$.对任意界面 $\Gamma_{ab}(t)$,定义等高集 $\phi^{(ab)}(x,y,z,t)$.由下述方程确定界面位置(Merriman et al.,1994):

$$\phi_t + u\phi_x + v\phi_y + w\phi_z = 0, \tag{2.44}$$

$$\phi^{(ab)}(x,y,z,0) \begin{cases} < 0 & (x,y,z) \in \Omega_a(0), \\ > 0 & (x,y,z) \in \Omega_b(0), \\ = 0 & (x,y,z) \in \Gamma_{ab}(0), \end{cases} \tag{2.45}$$

$$\phi^{(ab)}(x,y,z,t) \begin{cases} < 0 & (x,y,z) \in \Omega_a(t), \\ > 0 & (x,y,z) \in \Omega_b(t), \\ = 0 & (x,y,z) \in \Gamma_{ab}(t). \end{cases} \tag{2.46}$$

显然对于 N 个流体,一共需要求

$$(N-1) + (N-2) + \ldots + 1 = \frac{1}{2}(N-1)N$$

个等高集函数.等高集函数数量不等于流体个数,而等于界面个数.

2. 界面受力分析

有了等高集函数,界面位置和一些参数可以求出来.首先,界面的单位法向量 $\boldsymbol{n} = (n_x,n_y,n_z)^t$(这里不关心指向哪一边)为

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{\phi_x}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}}, \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}}, \frac{\phi_z}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}}\right)^t. \tag{2.47}$$

可以证明,界面曲率 κ 可以由下面关系式求得:

$$\kappa = -\nabla \cdot \boldsymbol{n}. \tag{2.48}$$

显然,$\boldsymbol{n}$ 沿法向不变,只可能沿界面的切向 $\boldsymbol{s}$ 存在变化,因此 $\kappa = -\nabla_s \cdot \boldsymbol{n}$.对于任一物理量 $\psi(x,y,z,t)$,沿界面法向梯度定义为

$$\nabla_n\psi = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\psi.$$

沿切向梯度定义为

$$\nabla_s\psi = (\nabla - \nabla_n)\psi.$$

记 p 为压力,σ 为表面张力系数(为温度函数,沿界面切向可以有变化),μ 为黏性系数.并记

$$H = p^{(a)} - p^{(b)} + \sigma\kappa.$$

界面受力平衡方程的三个分量(第一章)为

$$Hn_x = \boldsymbol{e}_x \cdot \nabla_s\sigma + (\tau_{xx}^{(a)} - \tau_{xx}^{(b)})n_x + (\tau_{xy}^{(a)} - \tau_{xy}^{(b)})n_y + (\tau_{xz}^{(a)} - \tau_{xz}^{(b)})n_z,$$

$$Hn_y = \boldsymbol{e}_y \cdot \nabla_s\sigma + (\tau_{yx}^{(a)} - \tau_{yx}^{(b)})n_x + (\tau_{yy}^{(a)} - \tau_{yy}^{(b)})n_y + (\tau_{yz}^{(a)} - \tau_{yz}^{(b)})n_z,$$

$$Hn_z = \boldsymbol{e}_z \cdot \nabla_s\sigma + (\tau_{zx}^{(a)} - \tau_{zx}^{(b)})n_x + (\tau_{zy}^{(a)} - \tau_{zy}^{(b)})n_y + (\tau_{zz}^{(a)} - \tau_{zz}^{(b)})n_z.$$

在法向 $\boldsymbol{n}$ 和某一切向 $\boldsymbol{s}$ 的投影分别为

$$H = 2\mu^{(a)}\boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{V}^{(a)}}{\partial n} - 2\mu^{(b)}\boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{V}^{(b)}}{\partial n} + \lambda^{(a)}\nabla \cdot \boldsymbol{V}^{(a)} - \lambda^{(b)}\nabla \cdot \boldsymbol{V}^{(b)}, \tag{2.49}$$

$$\mu^{(a)}\left(\boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{V}^{(a)}}{\partial s} + \boldsymbol{s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{V}^{(a)}}{\partial n}\right) - \mu^{(b)}\left(\boldsymbol{n} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{V}^{(b)}}{\partial s} + \boldsymbol{s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{V}^{(b)}}{\partial n}\right) = \frac{\partial \sigma}{\partial s}. \tag{2.50}$$

这里 $\lambda = -\dfrac{2}{3}\mu$.

把表面张力看成体积力(添加在 N-S 方程动量方程的右边),可以表示为(Brackbill et al.,1992)

$$\boldsymbol{F} = \delta(\phi)\sigma\kappa\boldsymbol{n}. \tag{2.51}$$

这里

$$\delta(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi \neq 0 \\ \infty & \phi = 0 \end{cases}, \int_{-\frac{1}{2}\varepsilon}^{+\frac{1}{2}\varepsilon} \delta(\phi) = 1, \varepsilon > 0.$$

3. 界面调节处理

在实际计算时,很难把界面看成几何上的(无限薄)曲面,而把它看成有一定厚度,相应的界面称为薄层.厚度一般为两个左右网格尺寸或与等高集函数联系起来.各种物理特性,包括表面张力在该薄层中按一定规律分布,既在宏观效应上等价于无限薄界面,又在数学上满足适定性等要求,而且在数值上容易处理.

首先定义函数 δ_ε

$$\delta_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 0 & |\phi| \geq \dfrac{1}{2}\varepsilon, \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\left[1 + \cos\left(\dfrac{2\pi\phi}{\varepsilon}\right)\right] & |\phi| \leq \dfrac{1}{2}\varepsilon. \end{cases}$$

显然 δ_ε 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(\phi)\mathrm{d}\phi = 1.$$

于是表面张力可以表示为

$$\boldsymbol{F} = \delta\varepsilon(\phi)\sigma\kappa\boldsymbol{n}.$$

对于任一物理参数 ψ(如黏性系数等),横穿界面的分布为

$$\psi(\phi) = \begin{cases} \psi^{(a)} & \phi \leqslant -\dfrac{1}{2}\varepsilon, \\ \psi^{(b)} & \phi \geqslant +\dfrac{1}{2}\varepsilon, \\ \dfrac{1}{2}(\psi^{(a)} + \psi^{(b)}) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon^2}{2\pi}(\psi^{(a)} - \psi^{(b)})\dfrac{\mathrm{d}\delta_\varepsilon(\phi)}{\mathrm{d}\phi} & |\phi| \leqslant \dfrac{1}{2}\varepsilon. \end{cases}$$

因此要求在有限界面边界上取 $\phi=\pm\frac{1}{2}\epsilon$. 在给初始条件时,要求等高集函数与界面的最短距离成正比. 在其他时刻也最好使等高集函数与该距离成正比,即可以调整等高集函数,使关系式

$$\nabla\phi = 1$$

满足(Sussman et al. ,1994).

2.2.3.2 液滴或固体颗粒在气体中的运动

1. 雾滴运动方程

先考虑单个液滴(或固体颗粒)在气体中的运动. 对于液滴,还存在由蒸化引起的质量和能量交换.

令 d_l 为液滴直径(r_l 为半径)、ρ_l 为密度、$\boldsymbol{V}_l$ 为速度、T_l 为液滴平均温度、$m=\rho_l\frac{1}{6}\pi d_l^3$为质量. 对于环境气体,令 ρ_g 为密度、$\boldsymbol{V}_g$ 为速度,p_g 为压力、T_g 为温度. 在考虑蒸化的情况下,令 $\hat{m}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 为蒸化速度,T_s 为液滴表面温度. 液滴运动的三个基本方程为(Bracco,1985)

$$\frac{\mathrm{d}d_l}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{\pi\rho_l d_l^2}\hat{m}\ (\text{质量}), \tag{2.52}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_l}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}_l(\text{动量}), \tag{2.53}$$

$$\frac{\mathrm{d}T_l}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{mc_{Pl}}(Q-\hat{m}L)+\frac{\hat{m}}{m}(T_l-T_s)\ (\text{能量}). \tag{2.54}$$

这里

$$\boldsymbol{F}_l = \frac{1}{2}\rho_g C_d A_p \mid \boldsymbol{V}_g - \boldsymbol{V}_l \mid (\boldsymbol{V}_g - \boldsymbol{V}_l),$$

为气体给液滴的空气阻力,$C_d=\frac{24}{Re_l}(\theta_g^{-2.65}+\frac{1}{6}\theta_g^{-1.78}Re_l^{\frac{2}{3}})$为阻力系数,

$$Q = A_s h(T_g - T_s),h = \frac{\kappa_g}{d_l}N_u$$

为液滴表面对流换热,$A_p=\pi r_l^2$ 为液滴迎风面积,$A_s=4\pi r_l^2$ 为液滴表面面积,$R_{el}=\frac{d_l\mid \boldsymbol{V}_g-\boldsymbol{V}_l\mid}{\nu_g}$为液滴雷诺数,$N_u=\theta_g^{-1.75}(2+0.6\theta_g^{1.25})\sqrt{Re_l}\sqrt[3]{Pr}$为努赛尔数,$\theta_g$ 为气体体积浓度(即气体占的局部体积比例),L 为液满潜热,κ_g 为气体热传导系数,Pr 为气体普朗特数.

液滴的蒸化速度可以采用下面的 Spalding 模型(Kanury,1977)计算:

$$\hat{m} = A_p\kappa_f\ln(1+B), \tag{2.55}$$

$$\kappa_f = \frac{\kappa_g}{c_{Pg}d_l}N_u, \tag{2.56}$$

$$B = \frac{c_{Pg}(T_g - T_s)}{L + c_{Pl}(T_s - T_l)} = \frac{Y_{vs} - Y_v}{1 - Y_{vs}}, \tag{2.57}$$

$$Y_{vs} = \frac{1}{1 + \frac{M_g}{M_l}\frac{p_g}{p_{vs}}}, \tag{2.58}$$

$$p_{vs} = C_1\exp(\frac{C_2}{T_s}) \text{ Clausius-Clapeyron 关系}. \tag{2.59}$$

这里 c_{Pg}为气体定压比热，M_g 为气体分子数，p_g 为气体压力，c_{Pl}为液滴定压比热，M_l 为液滴分子数，Y_v 为气体中蒸气(体积)浓度，Y_{vs}为饱和蒸气浓度，p_{vs}为饱和蒸气压，C_1 和 C_2 为常数.

将(2.58)至(2.59)代入(2.57)，便得确定液滴表面温度 T_s 的方程.有了表面温度，便可计算 B，从而得出蒸化速度.

在实际问题中，往往存在大量的液滴，不可能计算每一个液滴的运动.此时一般采用蒙特-卡罗[1]方法.它的基本思想是这样的，假设液滴遵循某种分布规律 $f=f(d_l, \boldsymbol{V}_l, \boldsymbol{x}_l, T_l)$.这里 $f(d_l, \boldsymbol{V}_l, \boldsymbol{x}_l, T_l)$表示直径为 d_l、速度为 $\boldsymbol{V}_l$、位置为 $\boldsymbol{x}_l$、温度为 T_l 的液滴所出现的概率密度.这种分布规律一般事先给定.一般只需要给定初始时刻的分布.在初始时刻液滴处于确定的位置(如喷口附近)，并且速度可能为常数.因此分布函数往往只是直径(半径)的函数.对于许多问题，f 满足下面的 Rosin-Rammler 分布规律(Williams, 1965)

$$f(r_l) = ar_l^c\exp(-dr_l^b). \tag{2.60}$$

一般取 $b=1$，而系数 a, c 和 d 由下面的关系式确定：

$$\int_0^\infty f(r_l)\mathrm{d}r_l = 1 \quad (\text{归一化条件}),$$

$$\int_0^\infty r_l f(r_l)\mathrm{d}r_l = \bar{r}_l \quad (\text{平均值定义}),$$

$$\frac{\mathrm{d}f(r_l)}{\mathrm{d}r_l} \mid r_l = r_{f\max} = 0 \quad \text{最大概率条件}.$$

这里$\bar{r}_l$ 为平均半径、$r_{f\max}$为最大概率对应的半径.由此得

$$c = \frac{r_{f\max}}{\bar{r}_l - r_{f\max}},$$

$$d = \frac{c+1}{\bar{r}_l},$$

$$a = \frac{d^{c+1}}{\Gamma(c+1)}.$$

假设液滴总的数量 N(往往为百万量级)已经知道.计算时只考虑一组数量有限的离散液滴 $n_d=1,2,\ldots,N_d$(往往为数千量级)，每个离散液滴对应随机半径 $r_l^{(n_d)}$ 并且代表一定数量的实际液滴 $N_r^{(n_d)}=N/N_d$.随机半径为满足分布规律(2.60)的随机函数 R_f，从而对应大 f 值的半径取得越多.假设均匀分布的随机函数为 R_u(一般计算机能自动生成)，则

[1] 蒙特-卡罗为世界著名赌城.赌博的输赢带有很大的随机性.蒙特-卡罗方法即为随机方法.

可以按下式确定随机函数 R_f：

$$R_u = \int_0^{R_f} f(r_l)\mathrm{d}r_l \Rightarrow \frac{\mathrm{d}R_f}{\mathrm{d}R_u} = \frac{1}{f(R_f)}.$$

2. 气体运动方程

采用积分形式. 方程与单相流基本相同，只是增加了气体体积浓度的影响和因质量、动量与能量交换引起的源项. 采用积分法，得密度、动量、能量所满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \theta_g \rho \mathrm{d}\Omega = \oint_\Sigma \theta_g \rho(\boldsymbol{V}_\Sigma - \boldsymbol{V}_g)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \theta_g \rho \boldsymbol{V}_g \mathrm{d}\Omega = \oint_\Sigma \theta_g \rho \boldsymbol{V}_g(\boldsymbol{V}_\Sigma - \boldsymbol{V}_g)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma + \int_\Omega \theta_g \rho \boldsymbol{F}\mathrm{d}\Omega$$
$$- \theta_g \oint_\Sigma p\mathrm{d}\Sigma + \oint_\Sigma \theta_g \boldsymbol{\tau}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma + S_{\mathrm{V}},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \theta_g \rho E \mathrm{d}\Omega = \oint_\Sigma \theta_g \rho E(\boldsymbol{V}_\Sigma - \boldsymbol{V}_g)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma + \int_\Omega \theta_g \rho \boldsymbol{V}\cdot \boldsymbol{F}\mathrm{d}\Omega$$
$$+ \oint_\Sigma \theta_g \boldsymbol{V}_g \cdot (\boldsymbol{P}\cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}\Sigma + \oint_\Sigma \theta_g \boldsymbol{q}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma + S_E.$$

值得注意的是，动量方程中的压力的项与其他项不同，气体体积浓度因子在积分号外面. 如果 $\theta_g \ll 1$，那么可以令

$$\theta_g \oint_\Sigma p_g \boldsymbol{n}\Sigma = \oint_\Sigma \theta_g p_g \boldsymbol{n}\Sigma.$$

如果需要考虑气体各种组分浓度的变化，则需要补充浓度的运输方程. 假设气体是由 d 种不同气体组成，气体 i 的质量浓度（即单位质量的气体中气体 i 的质量）记为 Y_i. 则浓度所满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho Y_i \mathrm{d}\Omega = \oint_{\Sigma(t)} \theta_g \rho Y_i(\boldsymbol{V}_\Sigma - \boldsymbol{V}_g)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma - \oint_\Sigma \boldsymbol{D}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma + S_Y.$$

上式中右端第一项为对流引起的变化、第二项为分子扩散引起的变化、第三项为相变或化学反映引起的变化. 扩散项类似于粘性扩散和热传导，其中 $\boldsymbol{D}$ 由菲克定律

$$\boldsymbol{D} = -\Gamma_i \nabla Y_i$$

确定，Γ_i 为扩散系数. 有了各组分的浓度，可以用标准软件（如 CHEMKIN）确定混合气体的各种物性参数和化学反应速度.

源项（不考虑化学反应）表达式为：

$$S_V = \sum_{\Omega(t)} (-\boldsymbol{F}_l + \hat{m}\boldsymbol{V}_l),$$

$$S_E = \sum_{\Omega(t)} \left(-\boldsymbol{F}_l \cdot \boldsymbol{V}_l + \hat{m}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{V}_l|^2 + c_{Vl}T_s\right) + A_s h(T_s - T_g)\right),$$

$$S_Y = \sum_{\Omega(t)} \hat{m}_i.$$

这里的求和表示对所有处于控制体积中的液滴求和.

2.2.4　特征多尺度问题:高低速问题统一处理

如果马赫数 $M=|\boldsymbol{V}|/a$ 极小,方程的求解可能存在如下几个问题:

1) 雅可比矩阵的最大特征值与最小特征值的比$(|\boldsymbol{V}|+a)/|\boldsymbol{V}|=1+M^{-1}$很大.这种方程为刚性方程,求解时容易出现不稳定或误差特别大.

2) 由于计算过程的时间推进受音速的限制,对流项引起的变化十分缓慢.为了获得对流引起的宏观变化,必须进行长时间的计算,使计算量特别大.

为了简单解决上述问题并获得各种速度情况下的统一方法,可以采用条件化预处理方法(Turkel,1998).利用这种方法,可以通过求可压缩 N-S 方程获得不可压流的解.由第三章 3.1 节知,在许多情况下,不可压缩流可以看成可压缩 N-S 方程在极小马赫数下的解.

先考虑基本变量形式的欧拉方程(2.21).将方程修改为

$$Q^{-1}V_\tau+A_pV_x+B_pV_y+C_pV_z=-V_t. \tag{2.61}$$

这里 Q 为可逆的条件化矩阵,适当选取该矩阵,使得 QA_p,QB_p,QC_p 的特征值之比均保持 1 的量级.方程左边第一项为虚拟时间步 τ 项.如果方程针对 τ 收敛,即 $V_\tau\to 0$,则上述方程的解退化为原方程的解.收敛之前的解称为预处理解,收敛后才为物理解.比较简单的选择是

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{a^2}{\beta M_r^2} & 0 & 0 & 0 & \delta\\ -\dfrac{\alpha u}{\beta M_r^2\rho} & 1 & 0 & 0 & 0\\ -\dfrac{\alpha v}{\beta M_r^2\rho} & 0 & 1 & 0 & 0\\ -\dfrac{\alpha w}{\beta M_r^2\rho} & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta M_r^2}{a^2} & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\beta M_r^2}{a^2}\delta\\ -\dfrac{\alpha u}{a^2\rho} & 1 & 0 & 0 & \dfrac{\alpha u}{\rho a^2}\delta\\ -\dfrac{\alpha v}{a^2\rho} & 0 & 1 & 0 & \dfrac{\alpha v}{\rho a^2}\delta\\ -\dfrac{\alpha w}{a^2\rho} & 0 & 0 & 1 & \dfrac{\alpha w}{\rho a^2}\delta\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$M_r^2=\begin{cases}\varepsilon & M\leqslant\varepsilon,\\ M^2 & \varepsilon\leqslant M<1,\\ 1 & M\geqslant 1.\end{cases}$$

这里,β 和 δ 为可调参数

$$\beta = a^2, \delta = 0 - 1, \alpha = 0 - 1.$$

雅可比矩阵 $QN_p = Q(A_p n_x + B_p n_y + C_p n_z)$ 的特征值为

$$\lambda_0 = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n},$$

$$\lambda_+ = \frac{1}{2}\left(z\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} + \sqrt{z^2 |\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}|^2 + 4\beta M_r^2\left(1 - \frac{|\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}|^2}{a^2}\right)}\right),$$

$$\lambda_- = \frac{1}{2}\left(z\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} - \sqrt{z^2 |\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}|^2 + 4\beta M_r^2\left(1 - \frac{|\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}|^2}{a^2}\right)}\right),$$

这里 $z = 1 - \alpha + \beta M_r^2 / a^2$. 当 $M \to 0$,有

$$\lambda_+ \to \frac{1}{2}\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\left((1-\alpha) + \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4}\right),$$

$$\lambda_- \to \frac{1}{2}\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\left((1-\alpha) - \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4}\right).$$

因此,无论马赫数多小,最大特征值与最小特征值之比为

$$\frac{\lambda_+}{\lambda_-} = \frac{1 - \alpha + \sqrt{1 - \alpha + 4}}{1 - \alpha - \sqrt{1 - \alpha + 4}} = \begin{cases} 2.6 & \alpha = 0 \\ 1 & \alpha = 1 \end{cases}.$$

而没有条件化的方程的雅可比矩阵的特征值之比在马赫数趋于零时趋于∞.

如果把满足条件化预处理方程的解定义为预处理解,则可以用下式定义所谓的预处理马赫数:

$$M_p = \frac{2\lambda_0}{\lambda_+ - \lambda_-} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \alpha = 0 \\ 1 & \alpha = 1 \end{cases}.$$

由于预处理马赫数接近 1,所以预处理解在收敛到物理解之前为跨音速流动,可能出现伪激波.

由于其简单性,往后我们选取 $\alpha = 0, \delta = 0$. 此时

$$QA_p = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta M_r^2}{a^2}u & \rho\beta M_r^2 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\rho} & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$QB_p = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta M_r^2}{a^2}v & 0 & \rho\beta M_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix},$$

$$QC_p=\begin{pmatrix}\frac{\beta M_r^2}{a^2}w & 0 & 0 & \rho\beta M_r^2 & 0\\ 0 & w & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & w & 0 & 0\\ \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & w & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & w\end{pmatrix}.$$

令 $\theta=\frac{\beta M_r^2}{a^2}$, $\bar{\theta}=\theta-1$,现在将

$$QN_p=\begin{pmatrix}\theta V_n & \theta\rho a^2 n_x & \theta\rho a^2 n_y & \theta\rho a^2 n_z & 0\\ \frac{1}{\rho}n_x & V_n & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{\rho}n_y & 0 & V_n & 0 & 0\\ \frac{1}{\rho}n_z & 0 & 0 & V_n & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & V_n\end{pmatrix},$$

对角化,即求对角化矩阵 L 和 L^{-1},使

$$QN_p=L\Lambda_N L^{-1}.$$

这里

$$\Lambda_N=\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_0,\lambda_0,\lambda_+,\lambda_-).$$

用前面类似方法,得

$$L^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -n_y & n_x & 0 & n_z\\ 0 & -n_z & 0 & n_x & -n_y\\ 0 & 0 & -n_z & n_y & n_x\\ \phi_+(\lambda_+-V_n) & \phi_+\theta\rho a^2 n_x & \phi_+\theta\rho a^2 n_y & \phi_+\theta\rho a^2 n_z & 0\\ \phi_-(\lambda_--V_n) & \phi_-\theta\rho a^2 n_x & \phi_-\theta\rho a^2 n_y & \phi_-\theta\rho a^2 n_z & 0\end{pmatrix}, \tag{2.62}$$

$$L=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \rho(\lambda_+-V_n)\psi_+ & \rho(\lambda_--V_n)\psi_-\\ -n_y & -n_z & 0 & n_x\psi_+ & n_x\psi_-\\ n_x & 0 & -n_z & n_y\psi_+ & n_y\psi_-\\ 0 & n_x & n_y & n_z\psi_+ & n_z\psi_-\\ n_z & -n_y & n_x & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{2.63}$$

这里

$$\phi_+=\psi_+=\frac{1}{\sqrt{\rho(\lambda_+-V_n)^2+\theta\rho a^2}},$$

$$\phi=\psi_-=\frac{1}{\sqrt{\rho(\lambda_--V_n)^2+\theta\rho a^2}}.$$

将(2.61)乘以 A_V,得

$$A_V Q^{-1} A_V^{-1} W_\tau + A_V(A_p A_V^{-1} W_x + B_p A_V^{-1} W_y + C_p A_V^{-1} W_z) = -W_t.$$

写成守恒形式,并添上黏性项,便得条件化预处理后的 N-S 方程

$$P^{-1} W_\tau + F_x^{(E)} + G_y^{(E)} + H_z^{(E)} = F_x^{(V)} + G_y^{(V)} + H_z^{(V)} - W_t. \qquad (2.64)$$

这里,条件化矩阵 $P = A_V Q A_V^{-1}$ 的表达式为(记 $Z = \frac{1}{2} + \frac{\bar{\gamma}}{4} M^2$)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \\ \frac{u}{a^2} & \rho & 0 & 0 & -\frac{u}{a^2} \\ \frac{v}{a^2} & 0 & \rho & 0 & -\frac{v}{a^2} \\ \frac{w}{a^2} & 0 & 0 & \rho & -\frac{w}{a^2} \\ \frac{1}{\bar{\gamma}} + \frac{M^2}{2} & \rho u & \rho v & \rho w & -\frac{M^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta M_r^2}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_V^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2}\theta & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \\ \frac{u}{a^2}\theta & \rho & 0 & 0 & -\frac{u}{a^2} \\ \frac{v}{a^2}\theta & 0 & \rho & 0 & -\frac{v}{a^2} \\ \frac{w}{a^2}\theta & 0 & 0 & \rho & -\frac{w}{a^2} \\ \frac{2Z\theta}{\bar{\gamma}} & \rho u & \rho v & \rho w & -\frac{M^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{\gamma}}{2} q^2 & -\bar{\gamma} u & -\bar{\gamma} v & -\bar{\gamma} w & \bar{\gamma} \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{w}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{\bar{\gamma}}{2} q^2 - a^2 & -\bar{\gamma} u & -\bar{\gamma} v & -\bar{\gamma} w & \bar{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{\bar{\gamma}}{2}\frac{q^2}{a^2}\bar{\theta} & -\bar{\gamma}\frac{u}{a^2}\bar{\theta} & -\bar{\gamma}\frac{v}{a^2}\bar{\theta} & -\bar{\gamma}\frac{w}{a^2}\bar{\theta} & \frac{\bar{\gamma}}{a^2}\bar{\theta} \\ \frac{\bar{\gamma}}{2}\frac{q^2 u}{a^2}\bar{\theta} & 1 - \frac{\bar{\gamma}}{a^2}u^2\bar{\theta} & -\frac{\bar{\gamma}}{a^2}uv\bar{\theta} & -\frac{\bar{\gamma}}{a^2}uw\bar{\theta} & \frac{\bar{\gamma}}{a^2}u\bar{\theta} \\ \frac{\bar{\gamma}}{2}\frac{q^2 v}{a^2}\bar{\theta} & -\frac{\bar{\gamma}}{a^2}vu\bar{\theta} & 1 - \frac{\bar{\gamma}}{a^2}v^2\bar{\theta} & -\frac{\bar{\gamma}}{a^2}vw\bar{\theta} & \frac{\bar{\gamma}}{a^2}v\bar{\theta} \\ \frac{\bar{\gamma}}{2}\frac{q^2 w}{a^2}\bar{\theta} & -\frac{\bar{\gamma}}{a^2}wu\bar{\theta} & -\frac{\bar{\gamma}}{a^2}wv\bar{\theta} & 1 - \frac{\bar{\gamma}}{a^2}w^2\bar{\theta} & \frac{\bar{\gamma}}{a^2}w\bar{\theta} \\ Zq^2\bar{\theta} & -Zu\bar{\theta} & -Zv\bar{\theta} & -Zw\bar{\theta} & \theta + \frac{\bar{\gamma}}{2}M^2\bar{\theta} \end{pmatrix}.$$

对于 $N = An_x + Bn_y + Cn_z$,有

$$PN = A_V Q A_V^{-1} A_V N_p A_V^{-1} = A_V L \Lambda_N L^{-1} A_V^{-1}.$$

即

$$PN = T\Lambda_N T^{-1}. \qquad (2.65)$$

这里 $T = A_V L, T^{-1} = L^{-1} A_V^{-1}$.

2.2.5　影响多尺度问题:无量纲化处理

在计算时,一般将方程写成无量纲化形式,从而每个参数都具有量级 $O[1]$. 此时方程中将出现一些无量纲化参数,如马赫数和雷诺数等. 这些参数的大小衡量了各种影响(如惯性力影响、压力影响和黏性力影响)的相对重要性. 不同的流动条件可以通过改变无量纲化参数给定.

将任一物理量 ϕ'(时间、距离、速度、密度、温度、压力、等等)除以参考量 ϕ^*,便得到无量纲化物理量 $\phi(=\phi'/\phi^*)$,方程变为无量纲形式,将出现某些由参考量组成的无量纲参数(马赫数、雷诺数、等).

一般给定部分参考量和某些无量纲参数,其他参考量可以通过无量纲参数的定义导出. 下面是一般需要使用的参考量:

L	参考长度,	t^*	参考时间,
ρ^*	参考密度,	p^*	参考压力,
T^*	参考温度,	U^*	参考速度,
μ^*	参考黏性系数,	σ^*	参考扩散系数,
c_P^*	参考等压比热,	c_V^*	参考等容比热,
κ^*	参考热传导系数,	h^*	参考焓,
k^*	参考湍流动能,	ε^*	参考湍流耗散率.

相应的无量纲参数有

$$M = \frac{U^*}{\sqrt{\dfrac{\gamma p^*}{\rho^*}}} \text{(马赫数)},$$

$$R_e = \frac{\rho^* U^* L}{\mu^*} \text{(雷诺数)},$$

$$F_r = \frac{(U^*)^2}{Lg} \text{(Froude 数)}.$$

马赫数反映了惯性力与压力之比. 如果马赫数特别大,那么压力影响可以忽略(见第三章 3.1 节). 雷诺数反映了惯性力与黏性力之比,当雷诺数趋于无限大时,黏性作用可以忽略从而可以直接求欧拉方程,如果雷诺数趋于 0,那么惯性力作用可以忽略. Froude 数反映了惯性力与重力之比.

一般直接给定马赫数 M、雷诺数 R_e 等无量纲参数和参考温度 T^*、参考压力 p^*. 其他参考量计算如下:

$$\rho^* = \frac{p^*}{T^* R} \quad (R \text{ 为气体常数,对于空气 } R = 287),$$

$$U^* = M\sqrt{\frac{\gamma p^*}{\rho^*}}, \quad c_V^* = \frac{(U^*)^2}{T^*},$$

$$c_P^* = c_V^* \gamma, \quad \kappa^* = \frac{\mu^* (U^*)^2}{T^*},$$

$$\sigma^* = \mu^*, \quad h^* = (U^*)^2,$$

$$L = \frac{R_e \mu^*}{\rho^* U^*}, \quad t^* = \frac{L}{U^*},$$

$$k^* = (U^*)^2, \quad \varepsilon^* = \frac{(U^*)^3}{L}.$$

令

$$p_0 = \frac{1}{M^2 \gamma},$$

则N-S方程的无量纲形式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_i}{\partial x_i} = 0, \tag{2.66}$$

$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial (p_0 p)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\tau_{ij}^{(l)} + \tau_{ij}^{(T)})}{\partial x_j}, \tag{2.67}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j H}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}[-Q_j + V_i(\tau_{ij}^{(l)} + \tau_{ij}^{(T)})]. \tag{2.68}$$

这里

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}),$$

$$\tau_{ij}^{(l)} = \frac{2\mu}{Re}(s_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\delta_{ij}),$$

$$\tau_{ij}^{(T)} = 2\mu_T(s_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\delta_{ij}) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij},$$

$$Q_j = -(\frac{\mu c_P}{P_r} + \frac{\mu_T c_P}{P_{\gamma T}})\frac{\partial T}{\partial x_j},$$

$$E = e + \frac{1}{2}V_i V_i + k,$$

$$H = E + \frac{p_0 p}{\rho} + k,$$

$$p = \rho R T = (\gamma - 1)\rho e,$$

$$e = c_V T, h = e + \frac{p_0 p}{\rho} = c_P T.$$

对于HL模型,无量纲形式为

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}[(\frac{\mu}{Re} + \frac{\mu_T}{\sigma_k})\frac{\partial k}{\partial x_j}] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\mu}{Re}\frac{k}{\epsilon}\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial x_j}) + S_k, \tag{2.69}$$

$$\frac{\partial \rho \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_j \hat{\varepsilon}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}[(\frac{\mu}{Re} + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon})\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j}] - \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\mu}{Re}\frac{\tilde{\varepsilon}}{k}\frac{\partial k}{\partial x_j}) + S_\varepsilon. \tag{2.70}$$

这里

$$S_k = \tau_{ij}^{(T)} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \rho(\tilde{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}),$$

$$S_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \tau_{ij}^{(T)} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} f_2 \rho \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k},$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \hat{\varepsilon},$$

$$\hat{\varepsilon} = 2 \frac{\nu}{Re} \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2,$$

$$\mu_T = \frac{\rho k^2}{\tilde{\varepsilon}} C_\mu f_\mu (y_\lambda),$$

$$C_\mu = 0.09, C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.92,$$

$$f_\mu = 1 - \exp(-0.01 y_\lambda - 0.008 y_\lambda^3),$$

$$\sigma_k = 1.4 - 1.1\exp[-(y_\lambda/10)],$$

$$\sigma_\varepsilon = 1.3 - 1.0\exp[-(y_\lambda/10)],$$

$$f_1 = 1, f_2 = 1,$$

$$\varepsilon_w = 2 \frac{\nu}{R_e} \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial n} \right)^2.$$

这里 $y_\lambda = y/\sqrt{(\nu k / Re\ \tilde{\varepsilon})}$. 另外有 $Re_T = \frac{Rek^2}{\nu\varepsilon}$, $Re_y = \frac{Rek^{\frac{1}{2}} y}{\nu}$.

以上的无量纲化不是唯一的. 这里用时间尺度加以说明. 令 L 和 U 分别为流场的长度尺度和速度尺度. a 为音速, ν 为分子运动黏性系数. 于是人们可以用下面的三个时间作为时间尺度:

- 波的传播时间　$t_{\text{wave}} \sim L / |U \pm a|$;
- 分子扩散时间　$t_{\text{diff}} \sim L^2 / \nu$;
- 湍流耗散时间　$t_{\text{diss}} \sim k / \epsilon$.

参 考 文 献

[1] F. V. Bracco, *Modelling of engine sprays*, SAE 850394, 1985, pp. 144-167.

[2] J. U. Brackbill, D. B. Kothe, and C. Zemach, *A continuum method for modelling surface tension*, J. Comput. Phys., **100** (1992) pp. 335-354.

[3] S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford 1961.

[4] A. Dervieux and P. Thomasset, *Multifluid incompressible flows by a finite-element method*, Proceedings of the seventh Intern. Conf. Numer. Methods in Fluid Dyna., Stanford, 1981, p. 158.

[5] P. G. Drazin and W. H. Reid, Hydrodynamic Stability, Cambridge 1981.

[6] G. M. Faeth, *Mixing, transport and combustion in sprays*, Prog. Energy Combust. Sci., **13**(1987), pp. 293-345.

[7] S. Fu, T. Rung, and F. Thiele, *On the realizability of nonlinear stress-strain relationship for Reynolds stress closures*, Flow, Turbulence and Combustion, **60**(1999), pp. 333-359.

[8] C. B. Hwang and C. A. Lin, *Improved low-Reynolds-number κ-ε model based on direct numerical simulation data*, AIAA J., **36**(1998), pp. 38-43.

[9] W. P. Jones and B. E. Launder, *The prediction of laminarization with two equation model of turbulence*, Int. J. Heat and Mass Transfer, **15**(1972), pp. 301-314.

[10] M. A. Kanury, Introduction to combustion phenomena, Cordon and Breach Science, 1977.

[11] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics (2nd edition), Butterworth and Heinemann, 1987 (also available from Beijing World Publishing Corporation, 1999).

[12] C. B. Lee, *Possible universal transitional scenario in a flate plate boundary layer: a measurement and visualization*, Physical Review E, **62**(2000), No. 3.

[13] C. C. Lin, The Theory of Hydrodynamic Stability, Cambridge 1955.

[14] W. Mulder, S. Osher, and J. A. Sethian, *Computing interface motion in compressible gas danamics*, J. Comput. Phys., **100**(1992), pp. 209-228.

[15] B. Merriman, J. K. Bence, and S. J. Osher, *Motion of multiple junctions: a level set approach*, J. Comput. Phys., **112** (1994), pp. 334-363.

[16] S. J. Osher and J. A. Sethian, *Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, J Comput. Phys., **79**(1988), pp. 12-49.

[17] Z. S. She and E. Leveque, *Universal scaling laws in fully developed turbulence*, Physical Review Letters, **72** (1994) pp. 336-339.

[18] B. K. Shivamoggi, Theoretical Fluid Dynamics, John Wiley & Sons, Inc., 1998.

[19] M. Sussman, P. Smereka, and S. J. Osher, *A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flows*, J. Comput. Phys., **114**(1994), pp. 146.

[20] E. Turkel, *Review of preconditioning for the compressible fluid dynamic equations*, CFD Review, **1** (1998), pp. 449-477.

[21] H. Viviand, *Formes conservatives des èquations de la dynamique des gaz*, La Recherche Aerospatiale, No 1, (1974), pp. 65-68.

[22] D. C. Wilcox, Turbulence modelling for CFD, DCW Industries, 1994

[23] F. A. Williams, Combustion Theory, Addison-Wesley, 1965.

[24] 是勋刚，湍流，天津大学出版社，1992.

第三章　流体力学方程的基本理论

N－S方程的非线性部分的处理属于计算流体力学的关键.该关键问题可以通过可压缩欧拉方程来研究.这种方程在数学上属于双曲系统.双曲系统的数学理论已比较成熟.因此本章讨论不局限于欧拉方程,而是针对一般的双曲系统.双曲系统有关守恒、适定、黎曼分解、弱解、熵条件的概念在计算流体力学中占有重要地位.本章末尾的附录对本章用到的一些数学概念进行了简要介绍.

3.1　非线性守恒系统与欧拉方程

对于一维问题,一阶非线性守恒方程系统的一般形式可以写成

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial f(w)}{\partial x}=0, x\in \mathbf{R}, t>0 \text{ (微分方程)}. \tag{3.1}$$

其中,未知函数(物理上也称因变量)$w=w(x,t)\in \mathbf{R}^m$ 有 m 个分量

$$w=(w^{(1)},w^{(2)},\cdots,w^{(m)})^t,$$

函数 $f=f(w)\in \mathbf{R}^m$ 称为通量函数,类似于流量.正是通量函数的空间变化引起未知数的变化.一般情况下,$f(w)$是 w 的足够光滑的函数,并且满足归零条件

$$\lim_{|w|\to 0}|f(w)|=0.$$

也就是说,通量是由因变量本身引起的,因变量为零时通量也为零.

因方程描述的是从零时刻开始的未知数变化,因此必须知道未知数的初始状态,也称初始条件

$$w(x,0)=w_0(x), x\in \mathbf{R}. \tag{3.2}$$

守恒概念是这样来的.令 w_0 在 $x\in \mathbf{R}$ 中具有紧支集,将式(3.1)对 $x\in \mathbf{R}$ 积分得

$$\int_{\mathbf{R}} w(x,t)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}} w_0(x)\mathrm{d}x.$$

于是,$\int_{\mathbf{R}} w(x,t)\mathrm{d}x$ 是守恒量,即它不随时间变化.也就是说,虽然因变量的变化是由通量函数引起,但通量的空间变化只引起未知数在空间的重新分配而不出现净增加或减少.

系统(3.1)加初始条件(3.2)称为初始值问题,也称柯西问题.实际问题往往定义在有限区域上,此时还存在边界条件.边界条件将在本章稍远的地方单独讨论.

对守恒系统(3.1),可以定义如下的展开系统

$$\frac{\partial w}{\partial t}+A(w)\frac{\partial w}{\partial x}=0, x\in \mathbf{R}, t>0. \tag{3.3}$$

其中

$$A(w)=\frac{\mathrm{d}f(w)}{\mathrm{d}w}=\left[\frac{\partial f^{(k)}}{\partial w^{(l)}}\right]_{k,l=1,2\cdots,m},$$

称为通量函数的雅可比矩阵.以后将知道,展开系统只在解光滑的区域才与守恒系统等价.

令 $W=W(x,t)$为方程(3.3)的解并设 w'为一小扰动.将 $w=W+w'$代入式(3.1)中,便得线性化系统

$$\frac{\partial w'}{\partial t}+A(W)\frac{\partial w'}{\partial x}=F,x\in\mathbf{R},t>0. \tag{3.4}$$

其中

$$F=-\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}w}w'\frac{\partial W}{\partial x},$$

为源项.令 $A'=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}w},V=\frac{\partial W}{\partial x}$.不难看出,存在唯一的 $m\times m$ 矩阵B,使得 $A'w'V=Bw'$.于是有

$$F=A'w'V=Bw'. \tag{3.5}$$

因此,当非线性系统线性化后,便产生了形如(3.5)的源项.正因如此,在解光滑区用线性理论进行研究时,必须在线性化方程中添加形如(3.5)的源项.

在线性化方程(3.4)中,如果将 $W(x,t)$的值冻结在任意的但固定的点(x_0,t_0)上,则得相应的常系数系统

$$\frac{\partial w'}{\partial t}+A\frac{\partial w'}{\partial x}=Bw',x\in\mathbf{R},t>0. \tag{3.6}$$

以后的部分理论是针对常系数系统建立的.最简单的常系数系统是运输方程

$$u_t+au_x=0. \tag{3.7}$$

一阶非线性守恒方程最简单的例子是无粘伯格斯方程

$$u_t+\left(\frac{1}{2}u^2\right)_x=0. \tag{3.8}$$

如果初始条件 $u(x,0)=u_0(x)$光滑,则在足够小的时间内,(3.8)的解为 $u(x,t)=u_0(x-ut)$.

流体力学中描述可压缩无黏流动的欧拉方程是最典型的非线性守恒系统.它包含三个方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0\ (\text{质量守恒}), \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2+p)=0\ (\text{动量守恒}), \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uH)=0\ (\text{能量守恒}). \tag{3.11}$$

这里,ρ 为密度,p 为静压,u 为速度,E 为总能,H 为总焓.因欧拉方程的未知数 $w=(\rho,\rho u,\rho E)^T$ 满足守恒方程,所以 $w=(\rho,\rho u,\rho E)^t$ 也称守恒变量.

压力 p、总能 E、内能 e、总焓 H、焓 h 等物理量之间有一定的关系.在完全气体假设的前提下,有

$$E = e + \frac{1}{2}u^2,$$

$$H = h + \frac{1}{2}u^2,$$

$$h = e + \frac{p}{\rho},$$

$$p = (\gamma - 1)\rho(E - \frac{1}{2}u^2).$$

其中 γ 为比热比.对于空气,一般取 $\gamma = 1.4$.

另外还有两个常用物理量:音速 $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$ 和熵 $S = c_V \ln \frac{p}{\rho^\gamma}$($c_V$ 为定容比热).

欧拉方程虽然是非线性方程,通量函数却是齐次函数,即 $f(\theta w) = \theta f(w)$,从而有 $f(w) = Aw$.

在一维变截面 $s = s(x)$ 管道中,准一维欧拉方程可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho us) = 0 \text{ (质量守恒)}, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho us) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 s + ps) = ps_x \text{(动量守恒)}, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Es) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uHs) = 0 \text{ (能量守恒)}. \tag{3.14}$$

该系统右端含有源项.

有几种特殊流动,欧拉方程的前面两个方程与第三个方程可以独立求解.它们是

1)等温流动:$e = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \text{const}$;

2)等熵流动:$S = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}$;

3)等焓流动:$H = h + \frac{1}{2}u^2 = \text{const}$.

尽管欧拉方程在求解时用的主要是其守恒形式,但在分析时用展开形式可能更有效.根据所选未知数的不同,展开的欧拉方程具有不同的形式.

最基本的是守恒变量形式

$$w_t + Aw_x = F. \tag{3.15}$$

这里 $w = (w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)})^t = (\rho, \rho u, \rho E)^t$ 即为前面提到的守恒变量,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(3-\gamma)\frac{u^2}{2} & (3-\gamma)u & \gamma - 1 \\ (\gamma-1)u^3 - \gamma uE & \gamma E - 3\frac{\gamma-1}{2}u^2 & \gamma u \end{pmatrix}.$$

守恒变量形式的缺点是,雅可比矩阵比较复杂,求它的特征值相当麻烦,而雅可比矩阵的特征值在本章所考虑的方程中具有举足轻重的地位.为了方便求特征值及与之相关的一些参数(如特征矢量),可以把展开形式转换成其他形式.假设选取 $\overline{w} = \overline{w}(w)$ 作为未知数,则新的方程可以根据下面的思路导出

$$f(w)_x = Aw_x = -w_t = -B\,\overline{w}_t \Rightarrow \overline{w}_t + B^{-1}Aw_x = 0 \Rightarrow \overline{w}_t + \overline{A}\,\overline{w}_x = 0. \quad (3.16)$$

这里 $B=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\overline{w}}$ 为未知数变换矩阵, $\overline{A}=B^{-1}AB$ 为以 $\overline{w}$ 作为未知数的方程的雅可比矩阵. 显然 $\overline{A}$ 和 A 为相似矩阵,从而具有相同的特征值.

最简单的是基本变量形式

$$(w_p)_t + A_p(w_p)_x = F_p. \quad (3.17)$$

这里 $w_p=(\rho,u,p)^T$ 为基本变量或原始变量,由实验可以测量到. 基本变量形式的优点是,雅可比矩阵

$$A_p=\begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \dfrac{1}{\rho} \\ 0 & \rho a^2 & u \end{pmatrix},$$

十分简单,便于求特征值.

通过量纲分析,可以推导出欧拉方程的一些极限情况. 令压力为密度的单值函数 $p=r(\rho)$(正压流体假设). 此时可以去掉能量方程而将欧拉方程写为

$$\rho'_t + u'\rho'_x + \rho' u'_x = 0, \quad (3.18)$$

$$\rho(u'_t + u'u'_x) + p'_x = 0. \quad (3.19)$$

这里为了方便引入了上标$'$.

令 $u'=Uu, \rho'=R\rho, p'=Pp, x'=Lx, t'=Tt$. 这里 u, ρ 和 p 以及它们的微分均具有量级O(1), U,R,P,L 和 T 为尺度参数. 其中 Q 和 P 满足关系式 $P=r(R)$. 定义尺度比 $F=\frac{UT}{L}$(斯托努哈尔数)和速度比 $M=\sqrt{\frac{U^2R}{P}}$(马赫数). 于是方程(3.18),(3.19)可以写成

$$\rho_t + Fu\rho_x + F\rho u_x = 0, \quad (3.20)$$

$$\rho(u_t + Fuu_x) + \frac{F}{M^2}p_x = 0. \quad (3.21)$$

以下是尺度比和速度比的意义:

- 宏观时空尺度问题: $F=O[1]$(一般非定常问题),
- 微观时间尺度(或大空间尺度)问题: $F\to 0$(气动声学问题或快非定常问题),
- 大时间尺度(或微观空间尺度)问题: $F\to\infty$(定常问题或极慢非定常问题),
- 低速问题: $M\to 0$(低亚音速问题或不可压流问题),
- 中速问题: $M=O[1]$(一般亚跨超音速问题),
- 高速问题: $M\to\infty$(高超音速问题).

下面考虑几种极限情况下的流动. 注意这里(严格)假设流动参数处处光滑(即连续而且导数分段连续).

高超音速极限 令 $M\to\infty, F\to 1$. 此时方程(3.18)-(3.19)简化为

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad (3.22)$$

$$u_t + uu_x = 0. \quad (3.23)$$

方程(3.23)即为无黏伯格斯方程.伯格斯方程往往被认为只具有理论意义而不具备任何物理意义.但实际上它描述了高超音速极限情况下速度的变化规律,具有明显的物理意义.另外,当均匀音速流动(弱激波问题)的非线性效应(如气体的激波里面)占主导地位时,也可以用伯格斯方程描述(Shivamoggi,1998).

不可压极限　令 $\rho' = \rho_0 + Q\rho$, $|Q| \ll 1$.从状态方程有

$$p' = r(\rho') = r(\rho_0 + Q\rho) \approx r(\rho_0) + Q\frac{\mathrm{d}r(\rho_0)}{\mathrm{d}\rho_0}\rho.$$

令 $p' = p_0 + Pp$,这里

$$p_0 = r(\rho_0), P \sim Q\frac{\mathrm{d}r(\rho_0)}{\mathrm{d}\rho_0}, \rho = p.$$

将

$$\rho' = \rho_0 + Q\rho, p' = p_0 + Pp,$$

代入(3.18)　(3.19),得

$$\rho_t + Fu\rho_x + F\frac{\rho_0 + Q\rho}{Q}u_x = 0, \tag{3.24}$$

$$(\rho_0 + Q\rho)[u_t + F(uu_x)] + F\frac{Q}{M^2}p_x = 0. \tag{3.25}$$

马赫数是反映压缩性大小的相似准则.因

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \sim \frac{\Delta p}{\Delta \rho}.$$

从伯努利原理可得

$$\Delta p \sim \frac{1}{2}\rho u^2,$$

$$a^2 \sim \frac{\frac{1}{2}\rho u^2}{\Delta\rho} \sim \frac{1}{2}\frac{u^2}{\frac{\Delta\rho}{\rho}} \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \frac{1}{2}\frac{u^2}{a^2} = \frac{1}{2}M^2.$$

由此可见,流体密度的变化取决与当地马赫数.在马赫数很小时,密度变化很小.因此如果 $M \to 0$,那么 $Q \to 0$.

取 $M \to 0$(从而有 $Q \to 0$), $F \to 1$, $\frac{Q}{M^2} = 1$.此时方程(3.24)-(3.25)转变为

$$u_x = 0, \tag{3.26}$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\rho_0}p_x = 0. \tag{3.27}$$

这就是不可压欧拉方程.因此在一定的尺度比范围内,不可压流动确实可以看成是某种可压流动的极限.Batchelor(1967)从物理分析阐明,一般情况下,需要满足包括马赫数趋于0和流场温差足够小等五个条件,可压缩流动才可以按不可压缩流动处理.最近在数学上对小马赫数下可压缩方程的解是否收敛到不可压缩流动方程的解有了一些数学研究结果(Kreiss,Lorenz,Naughton,1991).至少在等温假设下,不可压流动确实可以看成是可压流动在小马赫数下的极限.因此,人们往往通过求解小马赫数下的可压缩流动方程来近似获

得不可压缩流动的解.因此,只有同时满足尺度比条件、物理条件和数学条件等才能把不可压缩流动和低马赫数可压缩流动等同起来.对于一般的空气动力学问题,往往可以将二者等同起来.这里举出一个人们熟悉的反例.考虑活塞式发动机的压缩过程(或膨胀过程).活塞的前进速度为10米每秒的量级,引起的气流速度也是这个量级,属于低速问题,按理可以作不可压缩流动处理.但气体的密度变化在10倍的量级,属于可压缩流动.原来,气体在压缩与膨胀过程,有类似于声波的波在传播,部分属于快非定常效应.而上面的不可压极限推理考虑的是宏观尺度效应并且假设解是连续的.

波动方程 在方程(3.24)、(3.25)中令

$$Q\to 0,F\to 0,FQ/M^2\to\alpha\neq 0,F/Q\to\beta\neq 0.$$

于是有

$$\rho_t+\rho_0\beta u_x=0,\rho=p;$$

$$\rho_0u_t+\alpha p_x=0.$$

在上面方程组中消去 u,便得如下的波动方程

$$\rho_{tt}=c^2\rho_{xx}. \tag{3.28}$$

其中 $c=\frac{T}{L}a$,a 为音速.因此波动方程是欧拉方程在小马赫和小时间尺度下的极限.

时间收敛解(定常问题) 令 $F\to\infty$,则方程转化为

$$(\rho u)_x=0,$$

$$\rho u_x+\frac{1}{M^2}p_x=0.$$

这时问题不随时间变化.因此,当流动参数处处光滑(且在任意时刻保持光滑)时,经过足够长的时间流动参数不再随时间变化.如果解不光滑但问题定义在有限的区域,则在适当的边界条件下方程的解经过长时间变化后收敛到定常问题的解.这就是为什么通过求解非定常问题可以获得定常解的原因.

3.2 双曲性与适定性

对于一阶微分系统,双曲性与适定性是两个相互关联的概念.考虑如下常系数展开系统:

$$w_t+Aw_x=F,x\in\mathbf{R},0<t\leqslant T; \tag{3.29}$$

$$w(x,0)=w_0,x\in\mathbf{R}. \tag{3.30}$$

其中 $w=w(x,t)\in\mathbf{R}^m$,$A\in\mathbf{R}^{m\cdot m}$.

3.2.1 双 曲 性

令矩阵 A 的特征值为 $\lambda^{(k)},k=1,2,\cdots,m$.由 $\lambda^{(k)}$ 构成的对角矩阵记为 Λ.

定义 3.1 假定 A 为常系数矩阵.

a)如果 A 的所有特征值均为实数,则(3.29)称为弱(广义)双曲系统;

b)如果 A 的所有特征值均为实数并且 A 可以对角化(即有 m 个线性无关的特征向量),则(3.29)称为(强)双曲系统;

c)如果 $A=A^*$(从而存在单位矩阵将 A 对角化),则(3.29)称为对称双曲系统;

d)如果 A 的所有特征值均为实数并且互异,则(3.29)称为狭义(严格)双曲系统.

对于非线性系统(3.1),A 随时间与空间变化,从而系统的特性可能与空间与时间有关.但往往要求双曲性条件处处满足.

定义 3.2　考虑解区间 $w\in\Omega$.如果对所有 $w\in\Omega$,矩阵 $A(w)$的所有特征值均为实数,而且 $A(w)$可以对角化,则称系统(3.1)为双曲系统.

例 1　考虑系统

$$w_t+\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -a^2 & -1\end{pmatrix}w_x=0,$$

易证,矩阵 A 有两个实特征值 $-1\pm a$.当 $a\neq0$ 时,相应的特征向量$\left(\frac{1}{a},1\right)^t$,$\left(-\frac{1}{a},1\right)^t$线性无关,因而系统为双曲的.当 $a=0$ 时,只有一个线性无关的特征矢量$(1,0)^t$,因而 A 不能对角化,固系统为弱双曲.

例 2　考虑欧拉方程(3.15)不难验证,$A(w)$的三个特征值为 $\lambda^{(1)}=u$,$\lambda^{(2)}=u+a$,$\lambda^{(3)}=u-a$.很明显,$\lambda^{(3)}<\lambda^{(1)}<\lambda^{(2)}$,所以一维欧拉方程为狭义双曲系统.

双曲性概念的引人有其明确的意义:

1)当解连续且处处满足偏微分方程时,双曲性是与下面介绍的适定性相关联的.至少在常系数时,双曲性是与适定性等价的.

2)这里讨论的是一阶偏微分方程.在数学物理方程中,把二阶偏微分方程分成双曲型、抛物型与椭圆型三类.一阶双曲型方程与二解双曲型方程不能说没有联系.在某种简化前题下,一阶双曲型方程组可以转化为一个二阶标量双曲方程.最典型的例子是前面提到的波动方程(3.28).

3)双曲性定义 3.2 是相对时间的.对于定常问题,时间项消失,此时原双曲性定义不再有任何意义.例如,在二维情况下,欧拉方程仍是双曲型的,但在定常状态,原双曲性定义便失去了意义.特别是在小扰动假设下,定常欧拉方程可转化为二阶标量方程(位势方程),在超音速区为双曲型,在亚音速区为椭圆型.

3.2.2 适　定　性

现在来讨论(3.29)、(3.30)的适定性问题.这里讨论的适定性是针对古典解的(与往后定义的弱解相对应).

定义 3.3　如果双曲系统(3.1)的解 w 连续而且 w 的一阶偏导数分段连续,则 w 称为古典解.

从数学上讲,适定性包含三个基本问题:

1)解的存在性:对 $0<t<T$,柯西问题(3.29)、(3.30)是否有解?

2)解的唯一性:如果问题有解,它的解是否唯一?

3)解的稳定性:假定对固定的源项 F 和初始值 w_0,柯西问题(3.29)、(3.30)有唯一解 w.当在 F 和 w_0 加入小扰动时,这些小扰动对解 w 产生什么样的影响?

解的存在性研究是纯数学上具有很大难度的问题.在一般情况下,还不能证明流体力学的基本方程是否有解.纯数学家可能会问:既然不知道是否有解,为什么去用数值方法求解?但物理上我们知道流体力学的基本方程一般是有解的.对于计算流体力学工作者可以简单认为解是存在唯一的.因此下面简单假设解存在唯一,只考虑稳定性,即把稳定性与适定性等同起来.

这里只就古典解研究适定性.对于古典解,非线性问题的适定性与线性化问题的适定性密切相关.一般认为下面的线性化准则成立:

线性化准则 如果在 w 附近对非线性方程线性化所得的所有线性方程都是适定的,则该非线性方程对 w 是适定的.

如果方程具有常系数,则用傅里叶分析可以方便地研究适定性.对于双曲系统,下面的局部化原则成立:

局部化准则 如果对变系数线性问题冻结系数所得的所有常系数问题均适定,则该变系数线性问题是适定的.

由于线性化原则和局部化原则(Kreiss&Lorenz,1989),下面将只考虑常系数线性系统(3.29)、(3.30)的适定性.

定义 3.4 假定对固定的 F 和 w_0,柯西问题(3.29)、(3.30)有唯一解 w.如果存在 $\varepsilon>0$,使得对所有的满足 $\|\delta F\|_{(2)}+\|\delta w_0\|_{(3)}\leqslant\epsilon$ 的光滑小扰动 $\delta F,\delta w_0$,扰动问题 $v_t+Av_x=F+\delta F(v=w_0+\delta w_0)$ 有唯一解,而且 $\delta w=v-w$ 满足估计式

$$\|\delta w\|_{(1)}\leqslant K(\|\delta F\|_{(2)}+\|\delta w_0\|_{(3)}),$$

则称柯西问题是适定的.这里 K 与扰动大小无关.

这里,$\|\delta w\|_{(1)}$,$\|\delta F\|_{(2)}$,$\|\delta w_0\|_{(3)}$ 为某种范数.不同范数会导致不同的适定性定义.最常用的是 L_2 范数.

定义 3.5 如果存在常数 K,α,使得解满足 $\|w(\cdot,t)\|\leqslant Ke^{\alpha t}\|w(x,0)\|$,则称柯西问题(3.29)、(3.30)是适定的;如果存在常数 K,α 和整数 $q\geqslant1$,使得解满足 $\|w(\cdot,t)\|\leqslant Ke^{\alpha t}\|w(x,0)\|_{H_q}$,则称柯西问题(3.29)、(3.30)是弱适定的.

对空间算子 $P(\partial/\partial x)$,引入记号 $P(\iota\omega)$(这里,$\iota=\sqrt{-1}$).于是,对于初始值 $w_0=e^{\iota\omega x}\hat{w}_0(\omega)$,方程 $w_t=P(\partial/\partial x)w$ 的解为 $w(x,t)=e^{\iota\omega x}e^{P(\iota\omega)t}\hat{w}_0$.

对于方程(3.29),有 $P(\partial/\partial x)=A\dfrac{\partial}{\partial x}$,$P(\iota\omega)=A_{\iota\omega}$.令

$$w_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}e^{\iota\omega x}\hat{w}_0(\omega)\mathrm{d}\omega,$$

于是有

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}e^{\iota\omega x}e^{P(\iota\omega)t}\hat{w}_0(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

由 Parseval 关系式得:

$$\|w(\cdot,t)\|=\|e^{P(\iota\omega)t}\hat{w}_0(\omega)\|\leqslant\|e^{P(\iota\omega)t}\|\cdot\|\hat{w}_0(\omega)\|.$$

因此如果存在常数 K,α，使得对所有 $\omega\in\mathbf{R}$ 和 $t\geqslant0$ 都成立 $|e^{P(\omega)t}|\leqslant Ke^{\alpha t}$，那么

$$\|w(\cdot,t)\|\leqslant Ke^{\alpha t}\|\hat{w}_0(\omega)\|=Ke^{\alpha t}\|w_0\|.$$

因此下面的引理成立：

引理 3.1　如果存在常数 K,α，使得对所有 $\omega\in\mathbf{R}$ 和 $t\geqslant0$ 都成立

$$|e^{P(\omega)t}|\leqslant Ke^{\alpha t},\tag{3.31}$$

则柯西问题(3.29)、(3.30)是适定的.

由双曲性假设，存在矩阵 L，使得 $L^{-1}AL=\Lambda$，这里 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\cdots,\lambda^{(m)})$ 为对角矩阵，$\lambda_j\in\mathbf{R}$.

从矩阵理论知：$e^{LAL^{-1}}=Le^{A}L^{-1}$，$|e^{A}|\leqslant e^{|A|}$，$|e^{i\Lambda}|=1$，这里 $|A|$ 为矩阵 A 的模.

从 $A=L\Lambda L^{-1}$ 和 $|e^{-i\omega\Lambda t}|=1$ 得

$$|e^{P(i\omega)t}|=|e^{-i\omega At}|=|Le^{-i\omega\Lambda t}L^{-1}|\leqslant|L||L^{-1}|.$$

取 $\alpha=0$ 和 $K=|L||L^{-1}|$. 由引理 3.1 知柯西问题是适定的. 同样可以证明适定性意味双曲性，于是得到下面的适定性定理：

定理 3.1(适定性定理)　柯西问题(3.29)、(3.30)适定的充要条件是方程(3.29)为双曲系统.

同理可以证明：

引理 3.2　如果存在常数 K,α 和整数 $q\geqslant1$，使得对所有 $\omega\in\mathbf{R}$ 和 $t\geqslant0$ 都成立

$$|e^{P(\omega)t}|\leqslant K(1+|\omega|^{q})e^{\alpha t},\tag{3.32}$$

则柯西问题(3.29)、(3.30)是弱适定的.

定理 3.2(弱适定性定理)　柯西问题(3.29)、(3.30)弱适定的充要条件是方程(3.29)为弱双曲系统.

在(3.29)中添加扰动项 Bw. 此时 $P(i\omega)=Ai\omega+B$，

$$|e^{P(i\omega)t}|=|e^{i\omega At}e^{Bt}|=|Se^{i\omega\Lambda t}S^{-1}e^{Bt}|\leqslant|S||S^{-1}|e^{\alpha t},\alpha=|B|.$$

这导致了下面的重要定理：

定理 3.3　令(3.29)为双曲系统. 则在(3.29)中添加扰动项 Bw 后，柯西问题(3.29)、(3.30)仍保持适定.

已经知道，当把非线性方程线性化时，产生了扰动项 Bw. 由于扰动项不改变适定性，所以线性方程的结果可以(基本)推广到非线性方程. 但定理 3.3 对弱双曲系统是不成立的. 因此弱双曲系统的结论不能推广到非线性系统. 这就是我们要求一阶微分守恒系统为双曲系统的原因.

例 3　考虑例 1 当 $a=0$ 时，系统弱双曲. 如果添加扰动项

$$\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}w,$$

则方程成为

$$w_t+\begin{pmatrix}-1&-1\\-a^2&-1\end{pmatrix}w_x+\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}w=0.$$

相应地

$$P(\iota\omega)=\begin{pmatrix}\iota\omega-1 & \iota\omega+1\\ \iota a^2\omega-1 & \iota\omega-1\end{pmatrix}.$$

有特征值

$$\lambda=\iota\omega-1\pm\sqrt{-(1+\iota\omega+a^2\omega^2)}.$$

如果 $a=0$,则对于足够大的 $|\omega|$,有 $\mathrm{Re}\lambda\approx|\omega|^{\frac{1}{2}}$ 从而解 w 的傅里叶变换 $\hat{w}(\omega,t)=e^{P(\omega)t}\hat{f}(\Omega)$ 按 $e^{|\omega|^{\frac{1}{2}}t}$ 增长,即出现指数暴长.因此,本来弱适定的问题在加上扰动项后便失去了弱适定性.

3.3 特征线与黎曼不变量

特征线理论包含了双曲系统的重要特性,在现代数值方法包括边界条件处理中占有重要地位.

3.3.1 特征矢量与矩阵的对角化

令矩阵 A 的特征值为 $\lambda^{(k)},k=1,2,\cdots,m$.对每个特征值 $\lambda^{(k)}$,定义左特征矢量 $l^{(k)}$(行矢量)和右特征矢量 $r^{(k)}$(列矢量)

$$l^{(k)}A=\lambda^{(k)}l^{(k)},Ar^{(k)}=\lambda^{(k)}r^{(k)}.$$

由矩阵论知,左特征矢量与右特征矢量相互正交,即

$$l^{(i)}r^{(j)}=\delta_{ij}.$$

令 L 和 R 分别为左特征矢量和右特征矢量构成的矩阵

$$L=\begin{pmatrix}l^{(1)}\\ l^{(2)}\\ \vdots\\ l^{(m)}\end{pmatrix},R=(r^{(1)},r^{(2)},\cdots,r^{(m)})=L^{-1}.$$

则有

$$LA=\Lambda L,AR=R\Lambda.$$

如果有 m 个线性无关的特征矢量,则矩阵 L 和 R 均可逆,从而有

$$LAL^{-1}=\Lambda,R^{-1}AR=\Lambda.$$

对于欧拉方程,三个特征值分别为

$$\lambda^{(1)}=u,\lambda^{(2)}=u+a,\lambda^{(3)}=u-a.$$

相应的特征矢量各分量为

$$l^{(1)}=\left(1-\frac{1}{2a^2}(\gamma-1)u^2,-\frac{1}{a^2}(1-\gamma)u,-\frac{1}{\rho^2}(\gamma-1)\right),$$

$$l^{(2)}=\left(-\frac{u}{\rho}+\frac{1}{2\rho a}(\gamma-1)u^2,\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho a}(1-\gamma)u,\frac{1}{\rho a}(\gamma-1)\right),$$

$$l^{(3)}=\left(-\frac{u}{\rho}-\frac{1}{2\rho a}(\gamma-1)u^2,\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho a}(1-\gamma)u,-\frac{1}{\rho a}(\gamma-1)\right),$$

$$r^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\ u\\ \frac{u^2}{2}\end{pmatrix},$$

$$r^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\frac{\rho}{a}\\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{u}{a}\right)\rho\\ \frac{1}{4}u^2\frac{\rho}{a}+\frac{1}{2}\rho u+\frac{1}{2(\gamma-1)}\rho a\end{pmatrix},$$

$$r^{(3)}=\frac{\rho}{2\gamma}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\frac{\rho}{a}\\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{u}{a}\right)\rho\\ -\frac{1}{4}u^2\frac{\rho}{a}+\frac{1}{2}\rho u-\frac{1}{2(\gamma-1)}\rho a\end{pmatrix}.$$

如果直接从守恒变量的雅可比矩阵求特征值,则是相当麻烦的.一般以基本变量$\overline{w}$的方程$\overline{w}_t+\overline{A}\overline{w}_x=0$($\overline{A}=B^{-1}AB,B=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\overline{w}}$)求特征值和左特征矢量$\overline{l}$和右特征矢量$\overline{r}$.特征值总是不变的,两种方程之间的特征矢量可以通过下面关系式联系起来:

$$Ar=\lambda r,\overline{A}\overline{r}=\lambda\overline{r}\Rightarrow B^{-1}AB\overline{r}=\lambda\overline{r}\Rightarrow AB\overline{r}=B\overline{r}\lambda\Rightarrow r=B\overline{r},$$

$$lA=\lambda r,\overline{l}\ \overline{A}=\lambda\overline{l}\Rightarrow\overline{l}B^{-1}AB=\lambda\overline{l}\Rightarrow\overline{r}AB=\overline{l}B^{-1}\lambda\Rightarrow l=\overline{l}B^{-1}.$$

令 $A=A_0$ 为常数.对于欧拉方程,定义特征变量

$$w_c=Lw.$$

易验证

$$w_c=\begin{pmatrix}\rho-\frac{1}{a_0^2}p\\ u+\frac{1}{\rho_0a_0}p\\ u-\frac{1}{\rho_0a_0}p\end{pmatrix},$$

由 $w=L^{-1}w_c=Rw_c$,得

$$w=\sum_{k=1}^{m}w_c^{(k)}r^{(k)}.$$

因此,解可以按右特征矢量(也可以按左特征矢量)展开.

3.3.2 特征线与古典黎曼不变量

将展开系统(3.3)乘以左特征矢量 $l^{(k)}$并利用关系式 $l^{(k)}A=\lambda^{(k)}l^{(k)}$,得如下标量方

程

$$l^{(k)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\lambda^{(k)}\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0. \tag{3.33}$$

定义 3.6　对每个 k,由

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda^{(k)}(w), \tag{3.34}$$

定义的一族线 Γ^k 称为系统(3.3)的特征线.

如果定义

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)_{\Gamma^k}\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\Gamma^k},$$

则对每个 k,有

$$l^{(k)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\Gamma^k}=0. \tag{3.35}$$

称(3.35)为特征线形式的方程.

对于欧拉方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}(\rho)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}(\rho u)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}(\rho E)}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$l^{(3)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{p}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}-\rho a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$l^{(2)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{p}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\rho a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$l^{(1)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}-\frac{\gamma}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{1}{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{p}{\rho^{\gamma}}.$$

因此,特征线形式的方程为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\pm\rho a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u\pm a; \tag{3.36}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=0,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u. \tag{3.37}$$

这里 $S=c_V\ln\frac{p}{\rho^{\gamma}}$.

假定初始时刻 S 为常数,据式(3.37),对任意时刻有 $S(x,t)=\text{const}$. 由方程(3.36)积分得

$$R^{\pm}=\text{const},\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u\pm a. \tag{3.38}$$

这里

$$R^{+}=u+\frac{2}{\gamma-1}a,\ R^{-}=u-\frac{2}{\gamma-1}a,$$

称为古典黎曼不变量. 值得注意的是,古典黎曼不变量 $R^{\pm}$ 是在条件 $S=\text{const}$ 下得出的. 因此在初始时刻 S 为常数的情况下,$R^{\pm}$ 沿特征线不变.

3.3.3 Lax 黎曼不变量,简单波

原偏微分方程乘以左特征值导致了古典黎曼不变量的定义.用右特征值可以导出更一般的结论,相应的黎曼不变量称为 Lax 黎曼不变量.

定义 3.7 如果标量函数 $R^{(k)}=R^{(k)}(w)$满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}R^{(k)}}{\mathrm{d}w}r^{(k)}=0 \quad \forall w\in\Omega, \tag{3.39}$$

其中$\frac{\mathrm{d}R^{(k)}}{\mathrm{d}w}$为行向量,则 $R^{(k)}$称为双曲系统(3.1)的 k 位黎曼不变量即对应第k 个特征值的黎曼不变量(Lax 黎曼不变量).

方程(3.39)含有 m 个偏微分,每个偏微分对应一个独立的积分常数.因(3.39)只有一个方程,所以只能消去一个常数,从而可以求出 $m-1$ 个 k 位黎曼不变量

$$R_p^{(k)},p=1,2,3,\cdots,m-1.$$

例如,欧拉方程的 Lax 黎曼不变量为 $m(m-1)=6$ 个:

$$R_1^{(1)}=u,\qquad R_2^{(1)}=p \text{ 对于}\lambda^{(1)}=u;$$

$$R_1^{(2)}=u-\frac{2}{\gamma-1}a,\quad R_2^{(2)}=S \text{ 对于}\lambda^{(2)}=u+a;$$

$$R_1^{(3)}=u+\frac{2}{\gamma-1}a,\quad R_2^{(3)}=S \text{ 对于}\lambda^{(3)}=u-a.$$

对于等熵流动欧拉方程有 $m=2$,相应的 Lax 黎曼不变量为

$$R_1^{(1)}=u-\frac{2}{\gamma-1}a,\text{对于 }\lambda^{(1)}=u+a;$$

$$R_1^{(2)}=u+\frac{2}{\gamma-1}a,\text{对于 }\lambda^{(2)}=u-a.$$

定义 3.8 如果所有的 k 位黎曼不变量均为常数,则(3.1)的解称为 k 简单波(k-simple wave).进一步,如果条件$\frac{\mathrm{d}\lambda^{(k)}}{\mathrm{d}w}r^{(k)}\neq0(\forall w\in\Omega)$满足,则属于纯非线性波;如果条件$\frac{\mathrm{d}\lambda^{(k)}}{\mathrm{d}w}r^{(k)}=0(\forall w\in\Omega)$满足,则属于线性蜕化波(图 3.1).

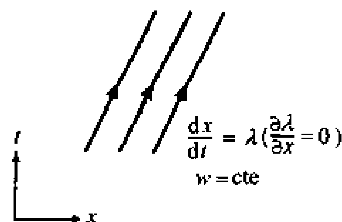


图 3.1　线性蜕化波

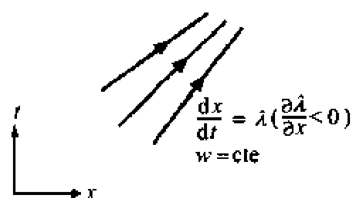


图 3.2　压缩波

对具有 m 个分量的解 w,有 $m-1$ 个 k 位黎曼不变量,所以一个 k 简单波只含有一个自由参数.

定义 3.9　考虑纯非线性波. 如果$\dfrac{\partial\lambda^{(k)}}{\partial x}<0$,则该 k 简单波称为压缩波(图 3.2);如果$\dfrac{\partial\lambda^{(k)}}{\partial x}>0$,则该 k 简单波称为稀疏波(图 3.3).

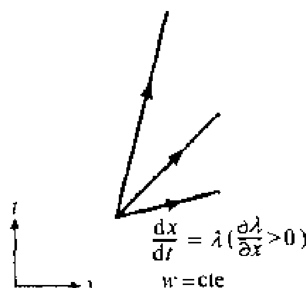


图 3.3　稀疏波

随着时间推移,对应压缩波的能量越来越集中(梯度越来越大);对应稀疏波的能量越来越分散(梯度越来越小).

对于欧拉方程,有

$$\frac{d\lambda^{(1)}}{dw}r^{(1)}=0,\frac{d\lambda^{(2)}}{dw}r^{(2)}=\frac{\gamma+1}{4\gamma}a,\frac{d\lambda^{(3)}}{dw}r^{(3)}=-\frac{\gamma+1}{4\gamma}a.$$

所以第二个和第三个特征波为纯非线性波,而第一个为线性蜕化波. 对于 2 简单波,

$$u-\frac{2}{\gamma-1}a=\text{const},\frac{p}{\rho^{\gamma}}=\text{const},\frac{\partial\lambda^{(2)}}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\gamma+1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

所以,当$\dfrac{\partial u}{\partial x}<0$ 时为压缩波,当$\dfrac{\partial u}{\partial x}>0$ 时为稀疏波.

3.4　弱解与黎曼问题

对于非线性双曲方程,即使初始条件连续,也可能在有限时间内(因压缩波的发展)出现解的间断. 气体动力学中激波与滑移面的出现便是人们熟悉的例子. 当解出现间断时,在间断点原偏微分方程不再成立. 为了研究间断解,前面针对古典解的理论不再适应,而要用这里介绍的弱解理论. 粗糙地说,弱解就是古典解加间断解.

3.4.1　伯格斯方程的弱解

这里用下面的具有连续初始条件的伯格斯方程来简要说明弱解的存在、产生、定义和特性:

$$u_t+uu_x=0,x\in\mathbf{R},t>0;\tag{3.40}$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in\mathbf{R}.\tag{3.41}$$

考虑如下的初始条件(压缩波)

$$u_0(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 0;\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1;\\ 0, & x>1\end{cases}.\tag{3.42}$$

当解连续时,$u(x,t)=u(x-ut,0)$. 对应上述初始条件的解为

$$u(x,t)=\begin{cases}1, & x\leqslant t;\\ \dfrac{1-x}{1-t}, & t<x\leqslant 1;\\ 0, & x>1\end{cases}.\tag{3.43}$$

很明显,当 $0<t<1$ 时,解(3.43)连续(图 3.4).

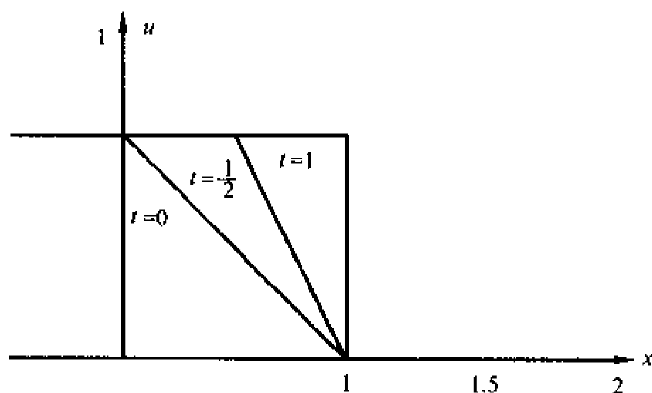


图 3.4　伯格斯方程压缩波的发展

$t\leqslant 1$

当 $t\to 1$ 时,解(3.43)不再连续而变成

$$u(x)=\begin{cases}1, x<1;\\0, x>1.\end{cases}\tag{3.44}$$

现在考虑这样一个问题:当 $t>1$ 时,解如何发展? 如果仅是连续解(3.43)的连续推广,则有

$$u(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant t;\\ \dfrac{1-x}{1-t}, & 1<x\leqslant t;\\ 0, & x>1.\end{cases}\tag{3.45}$$

从而 u 在区间 $1\leqslant x\leqslant t$ 是一多值函数(图 3.5).这在物理上是没有意义的.

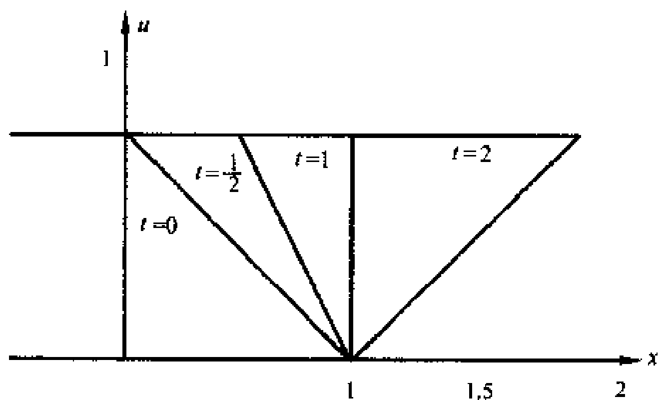


图 3.5　伯格斯方程压缩波的发展

$0\leqslant t\leqslant 2$ 多值解

我们研究的双曲系统应该具有其物理背景,而任何物理问题都或多或少含有一些耗散.双曲系统应该看成是耗散趋于零的极限.例如,应该把无黏欧拉方程看成是拉维-斯托

克斯方程在粘性趋于零的极限.为了求得任意时刻具有物理意义的解,考虑下面的粘性伯格斯方程在耗散系数 $\varepsilon \to 0$ 时的极限解

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, x \in \mathbf{R}, t > 0; \tag{3.46}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_0(x) \in C_0^0. \tag{3.47}$$

数学上可以证明,由(3.46)和(3.47)定义的柯西问题在任何时刻解唯一而且光滑,因而方程(3.46)在任何时刻都有意义.

设 $\phi = \phi(x,t)$ 为足够光滑且具有紧支集(即除有限区间外解为0)的试验函数.将方程(3.46)乘以 ϕ 后对时间与空间求积得

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + uu_x - \varepsilon u_{xx}) \phi \mathrm{d}x \mathrm{d}t = 0. \tag{3.48}$$

因 ϕ 是任意的,所以方程(3.48)和(3.46)是等价的.

用分部积分,方程(3.48)可以写成

$$\varepsilon \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u \phi_{xx} \mathrm{d}x \mathrm{d}t = -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u\phi_t + \frac{1}{2}u^2 \phi_x) \mathrm{d}x \mathrm{d}t - \int_{-\infty}^\infty u(x,0)\phi(x,0)\mathrm{d}x.$$

将初始条件代入上式并令 $\varepsilon \to 0$,得

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u\phi_t + \frac{1}{2}u^2 \phi_x) \mathrm{d}x \mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^\infty u_0(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x. \tag{3.49}$$

因此 $u|_{\varepsilon \to 0}$ 满足方程(3.49).

注意这样两个事实:

1)方程(3.49)的解确实是方程(3.46)在 $\varepsilon \to 0$ 时的极限解,因而具有物理背景;

2)在方程(3.49)中,偏导数 u_t 和 u_x 不存在,所在(3.49)对分段连续解仍有意义.正因如此,我们定义:

定义 3.10 如果 $u(x,t)$ 使得(3.49)对所有试验函数 $\phi \in C_0^1$ 都成立,则 $u(x,t)$ 称为柯西问题(3.40),(3.41)的弱解.

考虑分段连续的弱解.假定弱解在(以 x 为横轴、t 为纵轴定义的平面上的)曲线

$$\Gamma: (x = s(t), t), t_0 < t < t_1,$$

上有间断并且令

$$u_l(s(t),t) \xlongequal{\text{def}} \lim_{x \to s(t)-} u(x,t), u_r(s(t),t) \xlongequal{\text{def}} \lim_{x \to s(t)+} u(x,t).$$

设试验函数 ϕ 的支集是包含间断线 F 的足够小的邻域 U.邻域 U 被曲线 Γ 分成左右两部分 U_l, U_r.由弱解定义式(3.49)有

$$\int_U u_0(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x + \int_U (u\phi_t + \frac{1}{2}u^2\phi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

利用分部积分得

$$\begin{aligned}
&\int_U u_0(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x + \int_U (u\phi_t + \frac{1}{2}u^2\phi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_{U_l} u_0(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x + \int_{U_l} (u\phi_t + \frac{1}{2}u^2\phi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{U_r} u_0(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x + \int_{U_r} (u\phi_t + \frac{1}{2}u^2\phi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{U_l}(u_t + uu_x)\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Gamma \left(u_l\phi \mathrm{d}x - \frac{1}{2}u_l^2\phi \mathrm{d}t\right) \\
&\quad - \int_{U_r}(u_t + uu_x)\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Gamma \left(u_r\phi \mathrm{d}x - \frac{1}{2}u_r^2\phi \mathrm{d}t\right) \\
&= -\int_\Gamma \phi\left[(u_l - u_r)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(u_l^2 - u_r^2)\mathrm{d}t\right] \\
&= -\int_{t_0}^{t_1}\phi\left[(u_l - u_r)s'(t) - \frac{1}{2}(u_l^2 - u_r^2)\right]\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

因 ϕ 任意,所以有

$$
(u_l - u_r)s'(t) = \frac{1}{2}(u_l^2 - u_r^2). \tag{3.50}
$$

这就是所谓的 Rankine-Hugoniot 跳跃关系式,简称 R-H 关系式.

从上面的分析知,分段光滑函数 u 是柯西问题(3.40)、(3.41)弱解的充要条件是:

1)解 u 在所有连续点满足初始条件 $u(x,0)=u_0(x)$;

2)在解 u 光滑处,偏微分方程(3.40)局部成立;

3)在解 u 间断处满足跳跃关系式(3.50).

易验证,对于初始条件(3.42),伯格斯方程在 $t>1$ 时的弱解为(图 3.6)

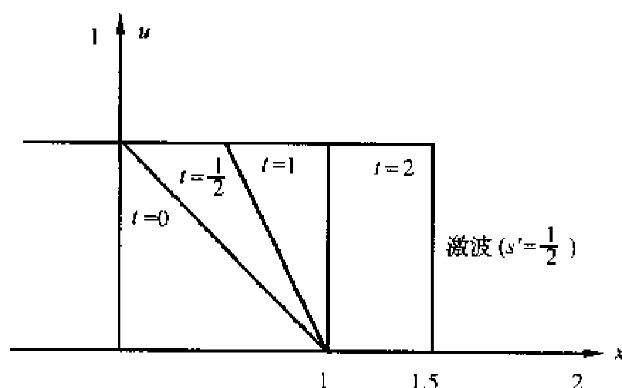


图 3.6　伯格斯方程压缩波的发展
0≤t≤2 弱解

$$
u(x) = \begin{cases} 1, x \leqslant 1 + \dfrac{t-1}{2}, t > 1; \\ 0, x \geqslant 1 + \dfrac{t-1}{2}, t > 1. \end{cases} \tag{3.51}
$$

3.4.2　一般系统弱解的定义

现在将上面弱解的定义推广到一般守恒系统(3.1)、(3.2).

定义 3.11　如果函数 $w(x,t)$ 除有限个点外均为古典解,并且对任意试验函数 $\phi \in \mathbf{C}_0^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+)^m$ 有

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(w\phi_t + f(w)\phi x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{\infty} w_0(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x. \qquad (3.52)$$

则称 $w(x,t)$为柯西问题(3.1)、(3.2)的弱解.

可以证明,对于一般双曲系统,弱解是存在的.

定理 3.4 分段光滑函数 w 是柯西问题(3.1)、(3.2)弱解的充要条件是:

ⓐ解 w 在所有连续点满足初始条件 $w(x,0)=w_0(x)$;

ⓑ在解 w 光滑处,偏微分方程(3.1)局部成立;

ⓒ在解 w 间断处满足跳跃关系式

$$\langle f(w)\rangle = s'\langle w\rangle. \qquad (3.53)$$

其中,s'为间断点的移动速度,$\langle\psi\rangle$为函数 ψ 在间断左右的跳跃,即$\langle\psi\rangle=\psi_r-\psi_l$.对于欧拉方程,有 $f(w)-s'w=\begin{bmatrix}\rho u_s\\ \rho uu_s+p\\ \rho Eu_s+pu\end{bmatrix}$, $u_s=u-s'$,由(3.53)得如下经典跳跃关系式

$$\langle\rho u_s\rangle=0,\langle\rho uu_s+p\rangle=0,\langle\rho Eu_s+pu\rangle=0.$$

3.4.3 黎曼问题

对于欧拉方程,考虑间断初始条件(图 3.7)

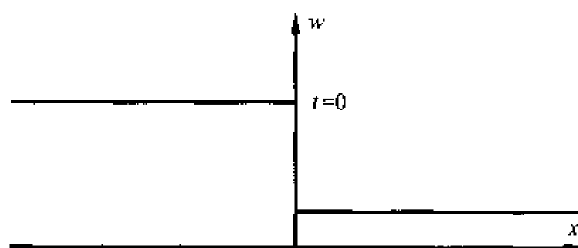


图 3.7 黎曼问题 $w(x,0)|x<0=w_l, w(x,0)|x>0=w_r$

$$w_0(x)=w_l, x<0; \quad w_0(x)=w_r, x>0.$$

先定义三种波:接触间断、激波与稀疏波.

接触间断 这是一个 1 简单波(即对应第 1 个特征值),没有流体穿过接触间断.由 R-H 条件得

$$\langle p\rangle=0,\langle u\rangle=0.$$

激波 满足 R-H 条件的一般间断称为激波,为纯非线性压缩波发展而来的.因滑移面为线性蜕化波,所以不属于激波.由 R-H 的 3 条件,连接定义间断的 7 个未知数:w_l, s', w_r.如果定义 $r\triangleq\dfrac{u_l-u_r}{a_r}$和$M_r\triangleq\dfrac{s'-u_r}{a_r}$(激波马赫数),则由 R-H 条件得下面关系式

$$M_r=\frac{\gamma+1}{4}r+\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2r^2+1}, \frac{p_l}{p_r}=1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_r^2-1).$$

中心稀疏波(2 简单波或 3 简单波)　中心稀疏波是以坐标(x_c, t_c)为中心的(即在位置 x_c 和时刻 t_c 开始发展的)、定义在有限区间上的自相似连续解,即

$$w(x,t)=v(\xi),\quad \xi=\frac{x-x_c}{t-t_c}.$$

稀疏波属于纯非线性稀疏波.因

$$w_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}\xi_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}\frac{1}{x},\quad w_x=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}\xi_x=-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}\frac{\xi}{x},$$

所以由 $w_t+Aw_x=0$ 得

$$(A(v)-\xi I)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}=0.$$

于是$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}$是矩阵$A(v)$的右特征矢量,$\xi$ 为特征值.由于是纯非线性波,所以 ξ 只可能取$u\pm a$.稀疏波一般由间断(经能量分散)发展而来,在空间分布在一个宽度越来越大的有限区间,区间的两个边界分别称为波前波后.

对于左移稀疏波(3 简单波),波前和波后的移动速度分别为 u_l-a_l 和 u_r-a_r,因属于 3 简单波,所以黎曼不变量 $R_1^{(3)}$(熵)和 $R_2^{(3)}=u+\frac{a}{\gamma-1}$(在波中为常数)

$$\frac{p^\gamma}{\rho}=\frac{p_l^\gamma}{\rho_l}=\frac{p_r^\gamma}{\rho_r},\tag{3.54}$$

$$u+\frac{a}{\gamma-1}=u_l+\frac{a_l}{\gamma-1}=u_r+\frac{a_r}{\gamma-1}.\tag{3.55}$$

中心稀疏波区波的移动速度为 $\xi=u-a$,因 $\xi=\frac{x-x_c}{t-t_c}$,所以有

$$\frac{x-x_c}{t-t_c}=u-a.\tag{3.56}$$

由(3.55)、(3.56)得

$$u(x,t)=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left[R^++\frac{2}{\gamma-1}\frac{x-x_c}{t-t_c}\right],$$

$$a(x,t)=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left[R^+-\frac{x-x_c}{t-t_c}\right].$$

由音速定义和等熵条件得

$$\rho(x,t)=\rho_l\left(\frac{a}{a_l}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}},p(x,t)=p_l\left(\frac{a}{a_l}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

对于右移稀疏波(2 简单波),波前和波后的移动速度分别为 u_r+a_r 和 u_l+a_l,因属于 2 简单波,所以黎曼不变量 $R_1^{(2)}$(熵)和 $R_2^{(2)}=u-\frac{a}{\gamma-1}$(在波中为常数)

$$\frac{p^\gamma}{\rho}=\frac{p_l^\gamma}{\rho_l}=\frac{p_r^\gamma}{\rho_r},\tag{3.57}$$

$$u-\frac{a}{\gamma-1}=u_l-\frac{a_l}{\gamma-1}=u_r-\frac{a_r}{\gamma-1}.\tag{3.58}$$

中心稀疏波区波的移动速度为 $\xi = u + a$，因 $\xi = \dfrac{x - x_c}{t - t_c}$，所以有

$$\frac{x - x_c}{t - t_c} = u + a. \tag{3.59}$$

由(3.58)、(3.59)得

$$u(x,t) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\left[R^- - \frac{2}{\gamma - 1}\frac{x - x_c}{t - t_c}\right],$$

$$a(x,t) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\left[R^- + \frac{x - x_c}{t - t_c}\right].$$

由音速定义和等熵条件得

$$\rho(x,t) = \rho_r\left(\frac{a(x,t)}{a_r}\right)^{\frac{2}{\gamma - 1}},\ p(x,t) = p_r\left(\frac{a(x,t)}{a_r}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}.$$

可以证明，对于间断初始条件，$t>0$ 时的一般解由一个向左移动的波、一个处于中间的 1 简单波(接触间断)和一个向右移动的波构成的. 向左和向右移动的波或为中心激波、或为中心稀疏波. 三个波之间由常态构成(图 3.8). 有 5 种可能的状态(图 3.9)：

(1)左移稀疏波 + 接触间断 + 右移激波；

(2)左移激波 + 接触间断 + 右移稀疏波；

(3)左移稀疏波 + 接触间断 + 右移稀疏波；

(4)左移激波 + 接触间断 + 右移激波；

(5)左移稀疏波 + 接触间断 + 真空 + 滑移面 + 右移激波.

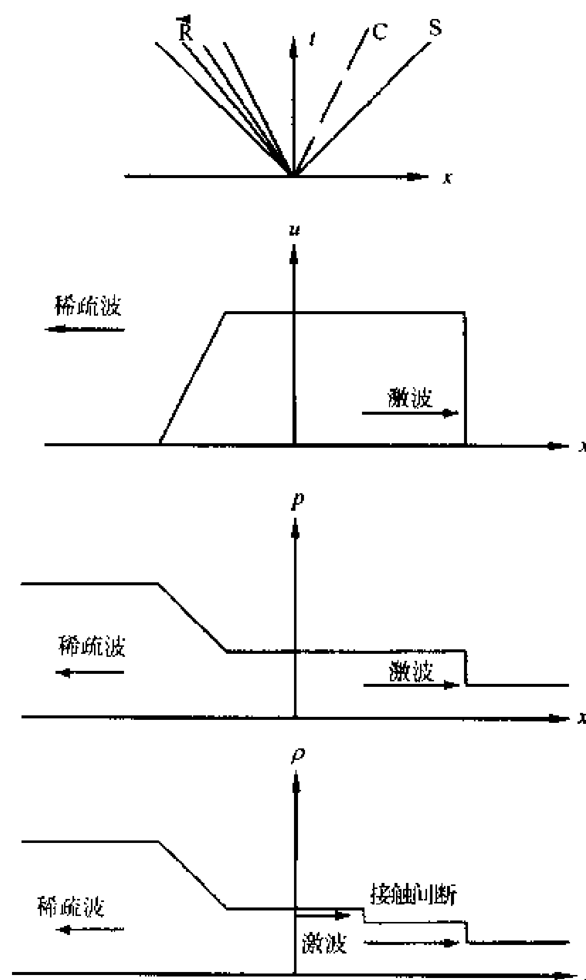


图 3.8　黎曼问题的解

定义 3.12(黎曼问题)　由初始间断的左右状态，确定 $t>0$ 时波态、波的强度和波与波之间的流动特性的问题称为黎曼问题. 相应的算法称为黎曼算子.

黎曼问题的详细求解可参见(Gottlieb & Groth, 1988; 水鸿寿, 1998).

在 $u-p$ 平面上，可以给出确定波态的区域. 用 S 表示激波，C 表示接触间断，R 表示稀疏波，N 表示不存在(上述三种波的任何一种). 确定各区域的边界由下面式子定义(图 3.9)：

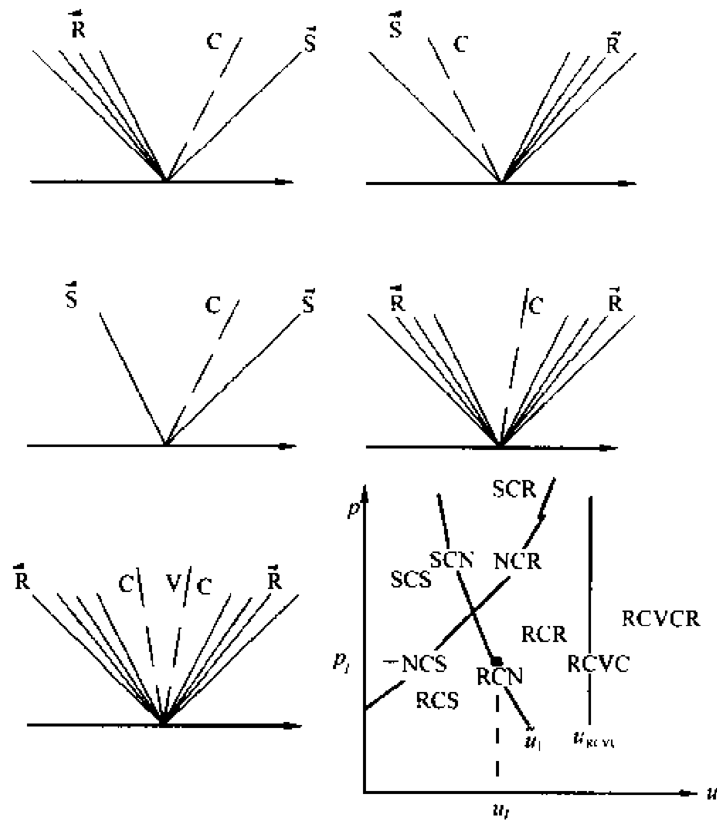


图 3.9　黎曼问题五种可能的波态和它们在 u-p 平面所对应的区域

$$\text{SCN:}\quad u_r = u_l - \frac{\dfrac{a_l}{\gamma_l}\left(\dfrac{p_r}{p_l} - 1\right)}{\sqrt{\dfrac{\gamma_l + 1}{2\gamma_l}\dfrac{p_r}{p_l} + \dfrac{\gamma_l - 1}{2\gamma_l}}},$$

$$\text{NCS:}\quad u_r = u_l - \frac{\dfrac{a_r}{\gamma_r}\left(\dfrac{p_l}{p_r} - 1\right)}{\sqrt{\dfrac{\gamma_r + 1}{2\gamma_r}\dfrac{p_l}{p_r} + \dfrac{\gamma_r - 1}{2\gamma_r}}},$$

$$\text{NCR:}\quad u_r = u_l + \frac{2a_r}{\gamma_r - 1}\left[1 - \left(\frac{p_l}{p_r}\right)^{\frac{\gamma_r - 1}{2\gamma_r}}\right],$$

$$\text{RCN:}\quad u_r = u_l + \frac{2a_l}{\gamma_l - 1}\left[1 - \left(\frac{p_r}{p_l}\right)^{\frac{\gamma_l - 1}{2\gamma_l}}\right],$$

$$\text{RCVR:}\quad u_r = u_l + \frac{2a_l}{\gamma_l - 1} + \frac{2a_r}{\gamma_r - 1}.$$

在每条边界上，边界左右区域中存在的一个波消失或蜕化为一马赫波(即间断大小趋于0). 例如，SCN 表示一个左移激波加一个滑移面，而右边或者没有波、或者有一右移马赫波.

3.5 熵 条 件

尽管黏性伯格斯方程在 $\varepsilon\to 0$ 时的解是无黏伯格斯方程的一弱解，但无黏伯格斯方程的弱解未必是黏性伯格斯方程在 $\varepsilon\to 0$ 时的解．也就是说，弱解(3.49)可能不唯一．考虑下面的初始条件

$$u_0(x)=0, x<0;\quad u_0(x)=1, x>0. \tag{3.60}$$

用此初始条件，伯格斯方程有一连续解(图 3.10)

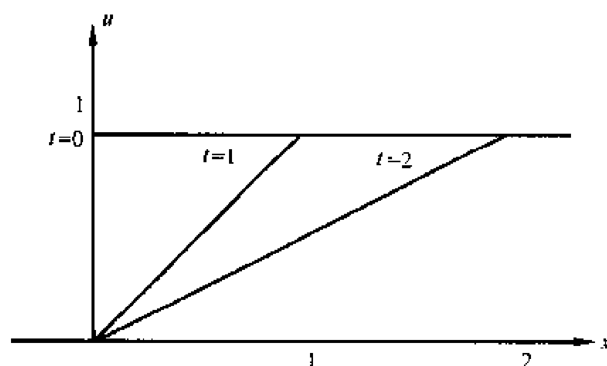


图 3.10　稀疏波

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{t}, & 0<x<t\ (\text{稀疏波}),\\ 1, & t\leqslant x\end{cases}$$

和一膨胀激波解(图 3.11)

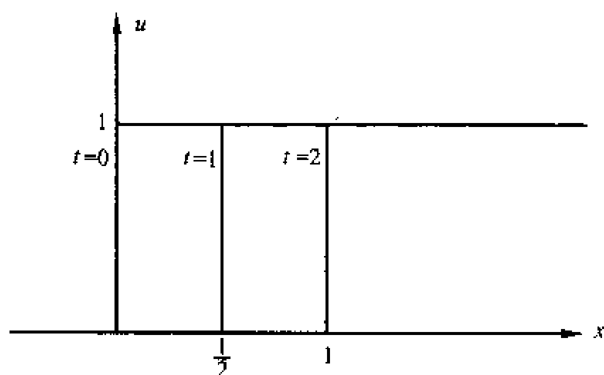


图 3.11　膨胀激波

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & x<\frac{1}{2}t\\ 1, & x>\frac{1}{2}t\end{cases}\quad\text{（膨胀激波）},$$

易证，上面的间断解满足跳跃关系式(3.50). 因此，用同一初始条件，得出了两个弱解：稀疏波和没有物理意义的但满足 R－H 关系式的膨胀激波.

在气体动力学中，热力学第二定律要求耗散系统熵$\left(S=c_V\ln\frac{p}{\rho^\gamma}\right)$是增加的. 当流体质点穿过激波时，因黏性作用熵应该增加、压力变大. 因此，间断解的左右之间的状态必需满足熵增条件才具有物理意义. 另外，也可从稳定性分析来判断间断解是否具有物理意义. 给间断解添加某种小扰动，如果间断解保持稳定，则属于物理解. 例如，给前面的膨胀激波加一小扰动，使其变为刚开始发展的稀疏波，则往后解以稀疏波发展，即膨胀激波不稳定. 熵的概念也可直接从数学上引入，下面介绍的熵的概念是从黏性方程定义的. 如果弱解是黏性方程当黏性系数趋于零时的极限解，则称此弱解为熵解，或具有物理意义的解. 另外还可定义数学上的熵，如果满足某种条件使得解为熵解，则称该条件为熵条件.

由前面的黎曼分析知，欧拉方程的古典解对应的熵 $S=c_V\ln\frac{p}{\rho^\gamma}$沿流体质点为常数，即$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=0$. 如果结合连续性方程便有

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uS)}{\partial x}=0.$$

令 $E=\rho S$，$F=\rho uS$，则上面的方程可以写成

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=0,$$

从面有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w}\frac{\partial w}{\partial x}=0.$$

用方程 $w_t=-Aw_x$，便得协调关系式

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}w}A.$$

对于一般双曲系统，引入

定义 3.13　称严格凸的标量函数 $E=E(w)$为双曲系统(3.1)的熵，如果存在函数 $F=F(w)$满足协调关系式$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}w}A$. 相应地，$F(w)$称为与 $E(w)$相关联的熵通量，(E,F)称为熵对.

对于伯格斯方程，可取$(E,F)=\left(\frac{1}{2}u^2,\frac{1}{3}u^3\right)$，对于欧拉方程，可取$(E,F)=(-\rho S,-\rho uS)$. 但 E 的选取并不唯一. 可以证明，严格凸函数 E 是熵的充要条件是矩阵$E''A$ 对称.

定理 3.5　设(E,F)是系统(3.1)的熵对. 令 w_ϵ 为抛物方程（黏性方程）

$$w_t+f(w)_x=\epsilon w_{xx},\ \epsilon>0.$$

的一族光滑解. 假设 w_ε 满足初始条件(3.2)并且当 $\varepsilon \to 0$ 时, w_ε 一致有界且收剑到函数 w_*. 则 w_* 是柯西问题(3.1)、(3.2)的弱解并且满足熵条件:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \leqslant 0. \tag{3.61}$$

定义 3.14 称弱解为可以接受的解(有物理意义的解、熵解), 如果对任何熵对 (E, F), 熵条件(3.61)都在弱解意义下成立, 即对所有试验函数 $\phi \in \mathbf{C}_0^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+)^m$, $\phi \geqslant 0$, 有

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}(E\phi_t + F\phi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{\infty}E(x,0)\phi(x,0)\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

定理 3.6 设 (E, F) 为熵对并令分段光滑函数 w 为(3.1)的弱解. 则 w 满足熵条件的充要条件是在解间断处满足下面跳跃条件[①]

$$\langle F(w)\rangle \leqslant s'\langle E(w)\rangle. \tag{3.62}$$

这里, s' 为间断的移动速度.

对于一维标量双曲方程, 熵解是唯一的; 但对于系统, 熵解可能不唯一 (Server, 1989). 对于同一问题, 也许能找到不同的熵对, 但人们一般满足于找到一个熵对就行了.

有时, 使用下面的 Lax 熵条件更方便:

定理 3.7 弱解是熵解的充要条件是, 存在一个指标 k, 使得 $\lambda_k(w_L) > s' > \lambda_k(w_r)$.

用 Lax 熵条件很容易验证, 前面提到的膨胀激波不满足熵条件. 也可选取 $(E, F) = \left(\frac{1}{2}u^2, \frac{1}{3}u^3\right)$, 证明膨胀激波不满足不等式(3.62).

3.6 边界条件

实际问题的计算一般是针对有限区域的, 在区域的边界上需要给定边界条件. 边界条件不能随意给定, 它要求在数学上满足适定性, 在物理上具有明显的意义. 在实际计算中, 边界的处理很重要, 这里介绍某些里要概念.

3.6.1 构造边界条件的基本原则

考虑半区间 $x > 0$ 上的展开系统

$$w_t + Aw_x = F(x, t), t \geqslant 0, x \geqslant 0, \tag{3.63}$$

与初始条件

$$w(x, 0) = w_0(x), x \geqslant 0, \tag{3.64}$$

在下面的分析中, 假定 A 为常数. 但结论对于 A 不为常数的情况均适应.

一般情况下, 在 $x = 0$ 处需要定义边界条件, 称为解析边界条件. 因方程(3.63)只含

① 因(3.62)是不等式, 所以要非常注意跳跃 $\langle E\rangle = E_r - E_l$ 的定义. 这里, 跳跃指间断右边值减左边值, 而右边定义在正轴方向.

有一次微分，所以相应的边界条件为狄利克莱型. 暂时把边界条件写成一般形式

$$Lw(0,t)=g(t),t\geqslant 0. \tag{3.65}$$

其中 $L=L(w)$为 $l\times m$ 矩阵，l 为边界条件的个数. 下面将看到，l 必须等于矩阵 A 正特征值的个数.

初始条件(3.64)与边界条件必须满足相容性条件

$$Lw_0(0)=g(0).$$

由方程(3.63)至(3.65)定义的问题称为混合初边值问题. 因区间在(x,t)平面上占四分之一，所以也称四分之一平面问题(quarter-plane problem). 当问题定义在有限区间 $x\in(0,1)$上时，在 $x=1$ 处也需定义边界条件. 但在不同边界上的边界条件可以单独给定，而不需考虑它们之间的相互作用. 更严格地说，当给 $x=0$ 处的边界条件时，可假定边界 $x=1$ 不存在而令 $x\in(0,\infty)$；当给 $x=1$ 处的边界条件时，可假定边界 $x=0$ 不存在而令 $x\in(-\infty,1)$. 区间$(-\infty,1)$又可通过坐标变换切换到$(0,\infty)$，因此理论上只须考虑四分之一平面问题.

边界条件的构造是从混合初边值问题的适定性考虑的. 与柯西问题类似，适定性包括三个问题：解的存在、解的唯一和解对(初始条件、源项和边界值)小扰动的稳定性.

定义 3.15　令 $w_0(x)=0$(当 $w_0(x)\neq 0$ 时可令 $v=w-w_0$ 而考虑 v 的方程). 如果混合初边值问题(3.63)至(3.65)的解存在唯一，并且存在与 g 和 F 无关的常数 K_T 使解满足估计式

$$\int_0^T |w(0,t)|^2 \mathrm{d}t+\int_0^T \| w(x,t)\|^2 \mathrm{d}t\leqslant K_T\left(\int_0^T |g(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T\| F(x,t)\|^2\mathrm{d}t\right),$$

则称该问题是适定的.

这一理论实际上可以推广到 N－S 方程(Kreiss & Lorentz, 1989). 还可以推广到更复杂的问题. 例如，Wu(2000)用适定性理论获得了合适的欧拉/N－S 混合模型的界面耦合条件，用以模拟理想流和粘性流动的相互干扰. 其中界面甚至可以与一激波重合，黏性区域甚至可以是湍流.

研究初边值问题的适定性有特征值法、能量法和正规模态分析三种方法. 这里只介绍特征值法.

标量方程($m=1$)　此时，可将方程(3.63)写成 $w_t+aw_x=0$. 相应的解在特征线 $x-at=\mathrm{const}$ 上为常数，即 $w(x,t)=w_0(x-at)$. 据此可分成三种情况：

1)$a<0$(出流边界)，对应任意时刻 $t>0$ 任意坐标点 $x\geqslant 0$ 的解 u 完全由 $x-at>x$ 处的初始值确定，所以不需任何边界条件；

2)$a=0$(特征边界)，对应任意时刻 $t>0$ 任意坐标点 $x\geqslant 0$ 的解 u 完全由 x 处的初始值确定，一般按 $a>0$ 处理；

3)$a>0$(入流边界)，对应满足 $x-at<0$ 的点 x 解满足关系式 $u(x,t)=u(0,t_i)$，$t_i=-(x-at)/a$，因而需要给边界条件

$$w(0,t)=g(t),t\geqslant 0. \tag{3.66}$$

其中边界给定值 $g(t)$要求足够光滑. 假设当 $a<0$ 时也给边界条件(3.66)，此时 $w(0_+,t)=w_0(x_\varepsilon)|_{\varepsilon\to 0}=w_0(-at)$. 一般情况下，$w_0(-at)\neq g(t)$. 于是，多余的边界

条件导致 $u(0,t)\neq u(0+,t)$,即解不能连续依赖边界数据,因而不适定.假设当 $a>0$ 时不给边界条件(3.66),则解不能唯一确定,因而不适定.

对角系统($A=\Lambda$) 为了方便,令 $\Lambda=\mathrm{diag}(\Lambda^I,\Lambda^{II})$,其中

$$\Lambda^I=\mathrm{diag}(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\cdots,\lambda^{(l)})\geqslant 0,\Lambda^{II}=\mathrm{diag}(\lambda^{(l+1)},\lambda^{(l+2)},\cdots,\lambda^{(m)})<0.$$

将(3.63)分解成

$$w_t^I+\Lambda^I w_x^I=0,w^I=(w^{(1)},w^{(2)},\cdots,w^{(l)})^t;$$

$$w_t^{II}+\Lambda^{II} w_x^{II}=0,w^{II}=(w^{(l+1)},w^{(l+2)},\cdots,w^{(m)})^t.$$

这里 w^I 对应正特征值,称为入流分量;w^{II}对应负特征值,称为出流分量.因方程的各分量相互独立,所以根据前面标量方程的分析,正确的边界条件为

$$w^I(0,t)=g^I(t),t\geqslant 0. \tag{3.67}$$

简单的说,对每个入流特征变量,应给边界条件.另外,w^{II}的方程是自封闭的而且不需边界条件,所以可以把边界条件(3.67)换为

$$w^I(0,t)=Sw^{II}(0,t)+g^I(t),t\geqslant 0. \tag{3.68}$$

这里 S 为任意有界$l\times(m-l)$矩阵.从几何上将,边界条件(3.68)可理解为出流分量 w^{II} 在边界上被部分反射,转化成入流分量 w^I.

一般双曲系统 设 T 为A 的对角化矩阵,即

$$T^{-1}AT=\Lambda=\mathrm{diag}(\Lambda^I,\Lambda^{II}),\boldsymbol{\Lambda}^I\geqslant 0,\Lambda^{II}<0.$$

定义特征变量 $w_c=T^{-1}w$.于是(3.63)变为

$$(w_c)_t+\Lambda(w_c)_x=0.$$

相应的边界条件可写成

$$w_c^I(0,t)=Sw_c^{II}(0,t)+g^I(t), \tag{3.69}$$

也可等价地写成

$$(T^{-1}w)^I=S(T^{-1}w)^{II}+g^I. \tag{3.70}$$

这里 w_c^I 和w_c^{II} 分别对应A 的正负特征值.

一般边界条件 在实际问题中,边界值往往由设计要求或试验测量给出,从而将边界条件直接写成

$$X^I(0,t)=GX^{II}+g(t). \tag{3.71}$$

这里,$X=(X^I,X^{II})^t$ 是可与w 相异的变量,X^I 包含的分量个数与A 的非负特征值个数相等.为使(3.71)满足适定性要求,必须证明它等价于(3.69)令

$$\begin{pmatrix} w_c^I \\ w_c^{II} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^I \\ X^{II} \end{pmatrix}, \tag{3.72}$$

并令$\overline{Q}_2=Q_2+Q_1G$ 和$\overline{Q}_4=Q_4+Q_3G$,则有

$$W^I=Q_1X^I+Q_2X^{II}=Q_1g(t)+\overline{Q}_2X^{II};$$

$$W^{II}=Q_3X^I+Q_4X^{II}=Q_3g(t)+\overline{Q}_4X^{II}.$$

如果$\overline{Q}_4$ 为空矩阵($l=m$),则由(3.72)可得 $w_c^I=Q_1g(t)$.如果$\overline{Q}_4$ 非空并且可逆,则由(3.72)得 $w_c^I=Sw_c^{II}+g'(t)$,其中

$$S=\overline{Q}_2Q_4^{-1},g'(t)=(Q_1-\overline{Q}_2\,\overline{Q}_4^{-1}Q_3)g(t).$$

因此有下面的结论：

定理 3.8　边界条件(3.72)保证适定的充要条件是，Q_4+Q_3G 为空矩阵或可逆矩阵.

3.6.2　欧拉方程的边界条件

令 $A_p=M^{-1}AM$，$\Lambda=T^{-1}A_pT$. 于是有

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ u & \rho & 0\\ \frac{u^2}{2} & \rho u & \frac{1}{\gamma-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{-u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0\\ \frac{(\gamma-1)u^2}{2} & (1-\gamma)u & (\gamma-1)\end{pmatrix}^{-1},$$

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{a^2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho a}\\ 0 & 1 & \frac{-1}{\rho a}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{\rho}{2a} & -\frac{\rho}{2a}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\rho a}{2} & -\frac{\rho a}{2}\end{pmatrix}.$$

令 $A=A_0=\text{const}$，$T=T_0=\text{const}$，定义特征变量

$$w_c=Q_0w_p=\begin{pmatrix}\rho-\frac{1}{a_0^2}p\\ u+\frac{1}{\rho_0a_0}p\\ u-\frac{1}{\rho_0a_0}p\end{pmatrix},Q_0=T_0^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{a_0^2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho_0a_0}\\ 0 & 1 & \frac{-1}{\rho_0a_0}\end{pmatrix}.$$

先考虑如何将边界条件定义在基本变量 $X=(\rho,u,p)$上.

亚音速入流$(0<u_0<a_0)$：此时，A 的前两个特征值为正，第三个特征值为负，所以应取 $w_c^I=(w_c^{(1)},w_c^{(2)})'$，$w_c^{II}=w_c^{(3)}$. 另外有

$$\begin{pmatrix}w_c^{(1)}\\ w_c^{(2)}\\ w_c^{(3)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{a_0^2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{\rho_0a_0}\\ 0 & 1 & \frac{-1}{\rho_0a_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ u\\ p\end{pmatrix}.$$

a)如果取 $X^I=(u,p)$，$x^{II}=\rho$，即对 u 和 p 给边界条件，则 $Q_4=0$. 于是 Q_4 不可逆，从而问题不适定.

b)如果取 $X^I=(\rho,u)$，$x^{II}=p$，即对 ρ 和 u 给边界条件，则 $Q_4=\frac{1}{\rho_0u_0}$. 于是 Q_4 可逆，从而问题适定.

c)如果取 $X^I=(\rho,p)$，$x^{II}=u$，即对 ρ 和 p 给边界条件，则 $Q_4=-1$. 于是 Q_4 可逆，

从而问题适定.

超音速入流($u_0>a_0>0$):此时所有特征值为正,对 ρ,u 和 p 都给边界条件.相应地,Q_4 为空矩阵,从而问题适定.

亚音速出流($0>u_0>-a_0$):此时只有第二个特征值为正,应取 $w_c^I=w_c^{(2)}$, $w_c^{II}=(w_c^{(1)},w_c^{(3)})^t$.于是有

$$\begin{pmatrix} w_c^{(2)} \\ w_c^{(1)} \\ w_c^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dfrac{1}{\rho_0 a_0} \\ 1 & 0 & \dfrac{-1}{a_0^2} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{\rho_0 a_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}.$$

如果取 $x^I=\rho, x^I=u$ 和 $x^I=p$,则分别有

$$Q_4=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{a_0^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}\rho_0 a_0} \end{pmatrix}, Q_4=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-1}{a_0^2} \\ 0 & \dfrac{-1}{\rho_0 a_0} \end{pmatrix}, Q_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

并且对所有情况 Q_4 均可逆,从而可将边界条件定义在 ρ,u 和 p 中的任一个上.

超音速出流($u_0<-a_0$):此时所有特征值为负,不要给任何边界条件,并且有 $Q_4=T^{-1}$.由双曲性定义,T^{-1}可逆.

最后介绍在外流计算中大量使用的一种边界条件:在亚音速入流部分取 $x^I=(H,S)$,在亚音速出流部分取 $x^I=p$.这里 H 为总焓,S 为熵.这里只考虑亚音速入流边界条件的适定性.将 $H=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}$ 和 $S=\frac{p}{\rho^\gamma}$ 线性化后,即令

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0^2}\rho+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\rho_0}p+u_0u \\ &= -\frac{1}{\gamma-1}\frac{a_0^2}{\rho_0}w_c^{(1)}+\frac{1}{2}(u_0+a_0)w_c^{(2)}+\frac{1}{2}(u_0-a_0)w_c^{(3)}, \\ S &= -\gamma\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma+1}}\rho+\frac{1}{\rho_0^\gamma}p=-\frac{a_0^2}{\rho_0^\gamma}w_c^{(1)}, \end{aligned}$$

便可将边界条件写成

$$w_c^{(1)}=g_a(t), w_c^{(2)}=\frac{a_0-u_0}{a_0+u_0}w_c^{(3)}+g_b(t).$$

因 $u_0>0$,所以该条件具有一般形式(3.69),即问题适定.

3.7 高维问题

在处理高维问题时,往往把每个方向看成一个一维问题,直接使用一维理论.

守恒形式的方程可以写为：

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial f_j}{\partial x_j}=0. \tag{3.73}$$

上面方程的展开形式为

$$w_t=P(\partial/\partial x)w,P(\partial/\partial x)=-\sum_{j=1}^{d}A_j\frac{\partial}{\partial x}.$$

这里 $A_j=\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}w}$ 为 $m\times m$ 矩阵. 引入记号

$$P(w)=-\sum_{j=1}^{d}A_j\omega_j,\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_d).$$

如果对所有 $\omega\in\mathbf{R}^d,|\omega|=1,P(\omega)$的所有特征值均为实数，且 $P(\omega)$可以对角化，则该系统称为双曲系统. 进一步，如果 $P(\omega)$的特征值两两互异，则为狭义双曲系统. 例如，二维和三维欧拉方程均为双曲系统，但不是狭义双曲系统.

对于高维双曲系统，前面的黎曼分析一般不再成立. 但弱解和熵条件可进行与一维问题相类似的定义.

设间断由曲面 $C(x_1,x_2,\cdots,x_d,t)=0$ 定义. 则与一维问题类似，间断左右的状态满足 Rankine-Hugoniot 跳跃条件

$$\langle w\rangle\frac{\partial C}{\partial t}+\sum_{j=1}^{d}\langle f_j\rangle\frac{\partial C}{\partial x_j}=0.$$

设 $E=E(w)$为严格凸函数，$F_j=F_j(E),j=1,2,\cdots,d$ 满足协调关系式$\frac{\mathrm{d}F_j}{\mathrm{d}w}=\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}w}A_j$，则在间断处熵条件可表述为

$$\langle E\rangle\frac{\partial C}{\partial t}+\sum_{j=1}^{d}\langle F_j\rangle\frac{\partial C}{\partial x_j}\leqslant 0.$$

在应用中，往往需要对方程进行坐标变换. 考虑坐标变换

$$\tau=t,$$
$$\xi_j=\xi_j(x_1,x_2,\cdots,x_d,t),j=1,2,\cdots,d,$$

在新的坐标系中，方程(3.73)变为

$$\frac{\partial w}{\partial \tau}+\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial \xi_j}{\partial t}\frac{\partial f_j}{\partial \xi_j}+\sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}=0. \tag{3.74}$$

如果变换矩阵$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right)$可逆并且解光滑($J=\det\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right)\neq 0$)，那么两系统(3.74)和(3.73)是等价的. 如果有间断解，但系统(3.74)不守恒，不能用来描述有间断的情况. 为了正确描述间断解，应将(3.74)写成守恒形式(第二章)

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{w}{J}\right)+\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{f_j^*}{J}\right)=0,\quad f_j^*=\frac{\partial \xi_j}{\partial t}w+\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}f_i. \tag{3.75}$$

定理 3.9 方程(3.75)与(3.73)具有相同的弱解.

证明 在解光滑的地方，两种方程的解自然相等. 因此只需验证二者的 R-H 条件是等价的. 为了方便，令 $x_0=t,f_0=w,\xi_0=\tau,f_0^*=w$. 将两种坐标系下的守恒方程写成如

下的时空守恒形式(即不区别时间与空间)

$$\sum_{j=0}^{d} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = 0, \tag{3.76}$$

$$\sum_{j=0}^{d} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{f_j^*}{J}\right) = 0. \tag{3.77}$$

其中 $f_j^* = \sum_{i=0}^{d} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} f_i$.

设间断由曲面 $C(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_d) = 0$ 定义. 在新的坐标系下,间断由曲面 $\overline{C}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_d) = 0$ 定义.

在两种坐标系下 Rankine-Hugoniot 跳跃条件分别为

$$\sum_{j=0}^{d} < f_j > \frac{\partial C}{\partial x_j} = 0, \tag{3.78}$$

$$\sum_{j=0}^{d} < \frac{f_j^*}{J} > \frac{\partial \overline{C}}{\partial \xi_j} = 0. \tag{3.79}$$

因间断只是解的间断,变换函数照样连续,所以关系式(3.79)可以写为

$$\sum_{j=0}^{d} < f_j^* > \frac{\partial \overline{C}}{\partial \xi_j} = 0.$$

再利用

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial \xi_j} = \sum_{i=0}^{d} \frac{\partial C}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j},$$

$$\sum_{j=0}^{d} f_j^* \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \sum_{j=0}^{d} \sum_{k=0}^{d} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} f_k \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \sum_{k=0}^{d} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} f_k = \sum_{k=0}^{d} \delta_{ik} f_k = f_i,$$

便证明了(3.79)等价于(3.78). □

附录 A　几个基本定义

在本章讨论中,用到的一些知识数学专业以外的读者不一定特别熟悉. 因此这里简单介绍. 为了易懂,尽量避免使用通用定义. 例如,下面提到的积分本来指的是适应范围比较广的 Lebesgue 积分,但我们简单称积分,读者可以按高等数学中的积分理解就可以了.

L_p 空间的定义　对具有 m 个分量的(矢量)函数 $\phi = \phi(x) \in \boldsymbol{R}^m$,如果 $|\phi|^p$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上积分存在有界,则称该函数属于 L_p 空间,记为 $\phi \in L_p$. 以后考虑的主要是 L_2 空间. 在空间 L_2 上定义内积和范数

$$(\phi, \psi) = \int_R \langle \phi, \psi \rangle \mathrm{d}x, \ \|\phi\| = (\phi, \phi)^{\frac{1}{2}}.$$

相应的 Parseval 关系式为

$$(\phi, \psi) = (\hat{\phi}, \hat{\psi}), \ \|\phi\| = \|\hat{\phi}\|.$$

其中

$$\hat{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{-i\omega x}\phi(x)\mathrm{d}x \ ,$$

为 ϕ 的傅里叶变换.

范数 $\|\cdot\|_{H_q}$ 的定义　对于任意函数 ϕ, $\|\phi\|_{H_q} = \sum_{\nu\leqslant q}\|\frac{\partial^\nu\phi}{\partial x^\nu}\|$. 由 Parseval 关系式, $\|\phi\|_{H_q} = \|\omega^\nu\hat{\phi}\|$, 从而有

$$\|\phi\|_{H_q} = \frac{1}{2\pi}\int_R\sum_{\nu\leqslant q}\omega^\nu\,|\,\hat{\phi}(\omega)\,|^2\mathrm{d}\omega.$$

指数矩阵的定义　对矩阵 A, 指数矩阵 e^A 定义为

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots.$$

凸函数的定义　称函数 $\psi = \psi(w)$ 为严格凸函数, 如果其二阶导数定义的矩阵 $\psi'' = \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}w^2}$ 是正定矩阵.

紧支集定义　如果函数在空间 $\mathbf{R}$ 和时间 $\mathbf{R}^+$ 上除一有界区域 $x\times t\in(a,b)\times(0,T)$ 外恒为零, 则称该函数在空间 $x\times t\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+$ 具有紧支集. 进一步如果该函数连续且具有直至 p 阶的连续导数, 那么记为 $\phi(x,t)\in C_0^p(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+)^m$.

附录 B　总结性习题及其解答

由于本章内容比较抽象, 特构造综合性习题, 并给出提示与详细解答. 考虑如下等温欧拉方程

$$w_t + f(w)_x = 0, x\in\Omega, t>0, \tag{3.80}$$

$$w = \begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\end{pmatrix}, f(w) = \begin{pmatrix}\rho u\\ \rho(u^2+a^2)\end{pmatrix},$$

和初始条件

$$w(x,0) = w_0(x), x\in\Omega. \tag{3.81}$$

这里, ρ 为密度, u 为速度, a 为音速. 由等温假设, 音速 a 为常数.

B.1　问　　题

题 1　令 $\Omega = \mathbf{R}$ 并且 $w\in C^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+)$(古典解), 证明初始值问题(3.80)、(3.81)是适定的.

题 2　求出古典黎曼不变量和 Lax 黎曼不变量.

题 3　设 $a=1$. 分析下面两组波是否为弱解和熵解:

a)波 1: 激波速度为 $s'=\sqrt{2}$, 激波左右的状态为常数且分别为

$$\begin{pmatrix}\rho_l\\ u_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\rho_r\\ u_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.5\\ 0\end{pmatrix}.$$

b)波 2:激波速度为 $s'=-\sqrt{2}$,激波左右的状态为常数且分别为

$$\begin{pmatrix}\rho_l\\u_\rho\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\rho_r\\u_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\0\end{pmatrix}.$$

题 4 令 $\Omega=\mathbf{R}^+$. 在 $x=0$ 处给边界条件

$$\text{a)}\ \rho(0,t)=g(t),$$

$$\text{b)}\ u(0,t)=g(t).$$

证明由式(3.80)、(3.81)和条件 a)或 b)所定义的初边值问题是适定的.

B.2 解题要领

题 1

求雅可比矩阵 $A=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}w}$ 和相应的特征值 λ: $\det(A-I\lambda)=0$. 如果存在虚特征值,则问题不适定. 如果所有特征值均为实数,则分三种情况:a)如果相异的特征值的个数等于矩阵 A 的阶数,则系统为狭义双曲的,因而是适定的;b)如果相异的特征值的个数小于矩阵 A 的阶数且线性无关的特征矢量的个数等于矩阵 A 的阶数,则系统为双曲的,因而也是适定的;c)如果相异的特征值的个数以及线性无关的特征矢量的个数均小于矩阵 A 的阶数,则系统为广义双曲的,因而是弱适定的.

题 2

对每个特征值 $\lambda=\lambda^{(k)}(k=1,2)$,由式

$$l^{(k)}(A-I\lambda^{(k)})=0,(A-I\lambda^{(k)})r^{(k)}=0,$$

计算左特征矢量 $l^{(k)}$ 和右特征矢量 $r^{(k)}$. 在特征线 Γ^k: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda^{(k)}$ 上,由式 $l^{(k)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}|_{\Gamma^k}=0$ 得出古典黎曼不变量 R(这里 $C(w)$ 和 $R(w)$ 均为标量),使得

$$C(w)\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=l^{(k)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}|_{\Gamma^k}.$$

由式 $\frac{\mathrm{d}R^{(k)}}{\mathrm{d}w}r^{(k)}=0$ 得出 Lax 黎曼不变量 $R^{(k)}$.

题 3

弱解 w 满足方程

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty(w\phi_t+f(w)\phi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^\infty w_0(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x\quad\forall\phi\in C_0^1(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+)^m.$$

对于分段光滑的解,在光滑区 w 满足原偏微分方程,在间断处 w 满足 R-H 跳跃条件

$$f(w_r)-f(w_l)=s'(w_r-w_l).$$

熵解必须满足熵条件

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\leqslant 0.$$

对于分段光滑的弱解,只须验证在间断处满足条件

$$F(w_r)-F(w_l)\leqslant s'(E(w_r)-E(w_l)).$$

如果熵对(E,F)事先未给出并且不易找到，则可验证 Lax 熵条件，即存在一 k，使得

$$\lambda^{(k)}(w_l)>s'>\lambda^{(k)}(w_r).$$

如果该不等式对任何 k 都不成立，则 Lax 熵条件不满足.

题 4

首先用左特征矢量 $l^{(k)}$ 构造矩阵 $L=(l^{(k)})$ 并求变换矩 $M=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}w_p}(w_0)$. 这里 $w_p=(\rho,u)^T$ 为基本变量. 考虑线性化系统来分析适定性，固令 L,M 为常量. 由 $w_c=Lw=Tw_p$ 得出特征变量 w_c 与基本变量 $w_p=(\rho,u)^T$ 的关系，这里 $T=LM$. 用特征变量，方程(3.80)线性化后就成为

$$(w_c)_t+\Lambda(w_c)_x=0,\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda^{(k)}).$$

将 $w_c=Tw_p$ 写成

$$\begin{pmatrix}W^I\\W^{II}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_1&Q_2\\Q_3&Q_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X^I\\X^{II}\end{pmatrix}.$$

这里 W^I 是由正特征值所对应的 w_c 的分量构成的矢量，W^{II} 是由负特征值所对应的 w_c 的分量构成的矢量，X^I 是 w_p 中给了狄利克来条件的分量(个数等于正特征值的个数)构成的矢量，X^{II} 是 w_p 中未给边界条件的分量构成的矢量. 这里所考虑的边界条件用变量 X 就写成 $X^I=g(t)$. 如果 $\det Q_4\neq0$，则由

$$\begin{pmatrix}W^I\\W^{II}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_1&Q_2\\Q_3&Q_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g(t)\\X^{II}\end{pmatrix},$$

消去 X^{II} 后得到 $W^I=SW^{II}+G(t)$(S 和 $G(t)$ 分别为有界矩阵和有界矢量)，从而根据特征线理论，初边值问题是适定的；如果 $\det Q_4=0$，则边界条件不能化为 $W^I=SW^{II}+G(t)$，因而初边值问题是不适定的.

B.3 解　答

题 1

分四个步骤来解答问题.

i)计算雅可比矩阵 $A=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}w}$. 由

$$w=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\\\rho u\end{pmatrix},f(w)=\begin{pmatrix}\rho u\\\rho(u^2+a^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w_2\\\dfrac{w_2^2}{w_1}+a^2w_1\end{pmatrix},$$

得到

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial w_1}&\dfrac{\partial f_1}{\partial w_2}\\\dfrac{\partial f_2}{\partial w_1}&\dfrac{\partial f_2}{\partial w_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\a^2-u^2&2u\end{pmatrix}.$$

ii)计算 A 的特征值. 式 $\det(A-I\lambda)=0$ 可以展开成

$$\lambda^2-2u\lambda+u^2-a^2=0.$$

由此得如下两个特征值

$$\lambda^{(1)}=u+a,\lambda^{(2)}=u-a.$$

iii)确定双曲性.因所有特征值都是实的而且互异特征值的个数等于系统标量方程的个数,所以系统为狭义双曲的.

iv)确定适定性.因系统是狭义双曲的,所以根据适定性定理,初值问题对于古典解是适定的.

题 2

分四步来求黎曼不变量.

i)计算特征矢量.先计算左特征矢量 $l^{(k)}$.取 $k=1$,有 $\lambda^{(1)}=u+a$.由 $l^{(k)}(A-I\lambda^{(k)})=0$ 得

$$(l_1^{(1)},l_2^{(1)})\begin{pmatrix}-(a+u) & 1\\ a^2-u^2 & u-a\end{pmatrix}=0,$$

从而得到关系式 $l_1^{(1)}+(u-a)l_2^{(1)}=0$.取 $l_2^{(1)}=1$,则有 $l_1^{(1)}=a-u$.所以对于 $k=1$,左特征矢量为

$$l^{(1)}=(a-u,1).$$

取 $k=2$,有 $\lambda^{(2)}=u-a$.类似于上面的分析,可得到

$$l^{(2)}=(-(a+u),1).$$

下面计算右特征矢量 $r^{(k)}$.取 $k=1$,有 $\lambda^{(1)}=u+a$.由 $(A-I\lambda^{(k)})r^{(k)}=0$,得 $-(u+a)r_1^{(1)}+r_2^{(1)}=0$,从而可取

$$r^{(1)}=(1,a+u)^T.$$

对于 $k=2$,有 $\lambda^{(2)}=u-a$.与上类似,得

$$r^{(2)}=(1,(u-a))^T.$$

容易验证,左右特征矢量具有如下性质:

$$L=\begin{pmatrix}l^{(1)}\\ l^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-u & 1\\ -(a+u) & 1\end{pmatrix},R=(r^{(1)},r^{(2)})=\begin{pmatrix}1 & 1\\ u+a & u-a\end{pmatrix},$$

$$LAL^{-1}=\begin{pmatrix}u+a & 0\\ 0 & u-a\end{pmatrix},L^{-1}=\frac{1}{2a}R.$$

ii)计算古典黎曼不变量.在特征线 $\Gamma^k:\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda^{(k)}$ 上,有 $l^{(k)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\big|_{\Gamma^k}=0$.这里

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\\ u\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}.$$

从

$$l^{(1)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=(a-u)\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}t}=a\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},$$

$$l^{(2)}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=-(a+u)\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\rho u}{\mathrm{d}t}=-a\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},$$

得到

$$\Gamma^1: a\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a\ln\rho+u)=0,$$

$$\Gamma^2: -a\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-a\ln\rho+u)=0.$$

于是,古典黎曼不变量为

$$R^+=u+a\ln\rho\quad(\lambda=u+a),$$
$$R^-=u-a\ln\rho\quad(\lambda=u-a).$$

iii)由$\frac{\mathrm{d}R^{(k)}}{\mathrm{d}w}r^{(k)}=0$计算 Lax 黎曼不变量.取 $k=1$,得

$$\frac{\mathrm{d}R^{(1)}}{\mathrm{d}w}r^{(1)}=\frac{\partial R^{(1)}}{\partial\rho}+(u+a)\frac{\partial R^{(1)}}{\partial(\rho u)}=\frac{\partial R^{(1)}}{\partial\rho}+\frac{a}{\rho}\frac{\partial R^{(1)}}{\partial u}.$$

因而有

$$\frac{\mathrm{d}R^{(1)}}{\mathrm{d}w}r^{(1)}=0\Rightarrow\frac{\partial R^{(1)}}{\partial\rho}+\frac{a}{\rho}\frac{\partial R^{(1)}}{\partial u}=0\Rightarrow R^{(1)}=u-a\ln\rho.$$

同理可以得到

$$R^{(2)}=u+a\ln\rho.$$

有趣的是,对应 $k=1$ 的 Lax 不变量 $R^{(1)}$等于对应 $k=2$ 的古典黎曼不变量 $R^{(-)}$;对应 $k=2$ 的 Lax 不变量 $R^{(2)}$等于对应 $k=1$ 的古典黎曼不变量 $R^{(+)}$.

题 3

分两步分析.

i)验证波为弱解.根据提示,只须验证在间断处解满足 R-H 跳跃条件

$$f(w_r)-f(w_l)=s'(w_r-w_l).$$

对于波 1,有

$$f(w_r)-f(w_l)=\begin{pmatrix}0\\0.5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\1.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-1\end{pmatrix},$$

$$s'(w_r-w_l)=\sqrt{2}\begin{pmatrix}0.5\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-1\end{pmatrix}.$$

因而波 1 满足 R-H 跳跃条件.同样,波 2 满足 $R-H$ 跳跃条件.因而两个波都是弱解.

ii)验证 Lax 熵条件,即验证是否存在 $k\in\{1,2\}$,使得

$$\lambda^{(k)}(w_l)>s'>\lambda^{(k)}(w_r).$$

先就波 1 验证.取 $k=1$.此时 $\lambda^{(1)}=u+a$,从而有 $\lambda^{(1)}(w_l)=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$,$\lambda^{(1)}(w_r)=1$.因

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+1>\sqrt{2}>1,$$

所以波 1 满足 Lax 熵条件.对于波 2,先取 $k=1$.此时 $\lambda^{(1)}=u+a$,从而有 $\lambda^{(1)}(w_l)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1$,$\lambda^{(1)}(w_r)=1$.易见

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}+1>-\sqrt{2}<1.$$

取 $k=2$,从 $\lambda^{(1)}=u-a$,得 $\lambda^{(2)}(w_l)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$,$\lambda^{(2)}(w_r)=1$.易见

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}-1<-\sqrt{2}<1.$$

因此,不存在 k 使 $\lambda^{(k)}(w_l)>s'>\lambda^{(k)}(w_r)$,即波 2 不满足 Lax 熵条件.因而波 2 不是熵解.

题 4

分两步来研究适定性.

i)建立特征变量 $w_c=Lw$ 与基本变量 $w_p=(\rho,u)^T$ 之间的线性关系 $w_c=Tw_p$.从

$$w_c=Lw=L_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ u_0 & \rho_0\end{pmatrix}w_p,$$

得到

$$T=\begin{pmatrix}a-u_0 & 1\\ -(a+u_0) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ u_0 & \rho_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & \rho_0\\ -a & \rho_0\end{pmatrix}.$$

ii)证明边界条件可以写成 $W^I=SW^{II}+G$.由亚音速入流假设,有 $\lambda^{(1)}=u+a>0$ 和 $\lambda^{(2)}=u-a<0$,从而 $W^I=(w_c)_1$,$W^{II}=(w_c)_2$.

考虑边界条件 a),即 $X^I=\rho=g(t)$.由 $w_c=Tw_p$ 得

$$\begin{pmatrix}W^I\\ W^{II}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & \rho_0\\ -a & \rho_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X^I\\ X^{II}\end{pmatrix},X^{II}=u.$$

因 $Q_4=\rho_0\neq 0$,所以边界条件 $\rho=g(t)$ 可以转化为 $W^I=SW^{II}+G$,即混和初边值问题是适定的.

考虑边界条件 b),即 $X^I=u=g(t)$.由 $w_c=Tw_p$ 得

$$\begin{pmatrix}W^I\\ W^{II}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho_0 & a\\ \rho_0 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X^I\\ X^{II}\end{pmatrix},X^{II}=\rho.$$

因 $Q_4=-a\neq 0$,所以边界条件 $u=g(t)$ 可以转化为 $W^I=SW^{II}+G$,即混和初边值问题是适定的.

参 考 文 献

[1] G. K. Batchelor, Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1967.

[2] J. Glimm, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), pp. 697-715.

[3] H.-O. Kreiss, *Initial boundary value problems for hyperbolic systems*, Comm. Pure Appl. Math., **23** (1970), pp. 277-298.

[4] H.-O. Kreiss and J. Lorenz, Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations. Academic Press Inc., 1989.

[5] P. D. Lax, *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation*, Comm. Pure Appl.

Math., **7**(1954), pp. 159-193.

[6] H. O. Kreiss, J. Lorenz, and M. Naughton, *Convergence of the solutions of the compressible equations to the solutions of the incompressible Navier-Stokes equations*, Advances in Appl. Math., **12**(1991), pp. 187-214.

[7] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math., **10**(1957), pp. 159-193.

[8] M. Sever, *Uniqueness failure for entropy solutions of hyperbolic systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., 42(1989), pp. 173-183.

[9] B. K. Shivamoggi, Theoretical Fluid Dynamics, John Wiley & Sons, 1998.

[10] H. Viviand, *Formes conservatives des èquations de la dynamique des gaz*, La Recherche Aerospatiale, No 1, (1974), pp. 65-68.

[11] Z. N. Wu, *Linear well-posedness of a hybrid inviscid/viscous flow problem with smooth and discontinuous solutions at the interface*, Acta Mechanica, accepted.

[12] 水鸿寿,一维流体力学差分方法,国防工业出版社,1998.

第四章　构造计算方法的基本原理

这里介绍数值方法的一些基本概念、规范的差分构造方法、差分向非线性守恒系统推广的基本原理、数值边界条件的定义和时间积分方法. 不强调任何具体方法的介绍,而采用一维问题论述一些具有一般意义的原则. 向高维问题的推广在第六章介绍. 除这里介绍的方法外,还有在空间离散方面有别于有限差分的特殊方法(如有限元法、谱方法、准谱方法等)和基于将方程写成特殊形式的方法(如玻尔兹曼方法、格子气方法、拉格朗日方法、涡方法等). 特殊方法往往针对特殊用途,没有有限差分法那样能普遍应用. 单从有限差分法便可了解计算流体力学数值方法的全貌. 所以这里只介绍有限差分法.

4.1　基本概念

描述流体运动的方程在一般情况下属于非线性守恒方程组,不能用解析办法求解. 这便是需要使用数值方法的原因.

计算时并不去求空间任意点和任意时刻的解. 我们只对空间一组数目有限的离散点上的解感兴趣. 这些离散点定义在事先构造好的网格节点上.

用于计算计算域内部流动的数值方法称为格式、内点格式等. 内点格式是数值方法的主体.

另外,任何计算都需要初始条件,即初始时刻网格点上的流动参数. 往往直接给定. 对于定常问题的计算,一般给均匀来流作初始条件.

一般问题的计算域都有边界. 因此需要对边界条件进行离散. 许多边界条件都是一个简单的代数关系式,所以它的数值处理相对简单. 从特征理论知道,某些边界或方程的某些特征分量并不需要解析边界条件. 但后面将看到,在不存在解析边解条件的边界,可能因内点格式涉及一些多余的未知数从而需要添加数值边界条件,以对内点格式进行封闭.

数值方法的构造可以分成如下几步:

1)网格系统的构造. 设网格点 $j(j=1,2,\ldots,J)$ 坐标为 x_j(假设 $x_j<x_{j+1}$). 网格尺寸(也称空间步长)$h_j=x_{j+1}-x_j$ 如果与 j 无关,则称为均匀网格. 如果尺寸与 j 有关,则称为非均匀网格. 如果 $\frac{h_{j+1}}{h_j}<1(\forall_j)$ 则称网格向右加密. 称 $\frac{h_{j+1}}{h_j}=r<1$ 为几何加密, $h_{j+1}=h_j-r$ 为代数加密. 这里 r 为常数.

2)时间步长的构造. 记时间步长为 k_j. 时间步长一般依赖空间步长. 二者的关系由著名的 CFL(Courant-Friedrichs-Lewy, 1928)数决定:

$$CFL = |\lambda_j^{(\max)}|\frac{k_j}{h_j}.$$

CFL 数为计算流体力学中最具普适意义的无量纲参数.这里,$\lambda_j^{(\max)}$ 代表方程的最大特征值即波的最大传播速度.对于可压缩流体,最大传播速度等于音速加对流速度.很显然,$\lambda_j^{(\max)}k_j$ 代表最快波在每一时间步移动的距离,因此 CFL 表示最快波在每一时间步移动的网格点个数.如果要求在一个时间步波能从 $j \pm L$ 传播到 j,则在 j 点的格式必须用到前一时刻 $j \pm L, j \pm (L-1), \ldots, j$ 上的值.对于最简单的格式,只用到前一时刻左右两点和中点的值(显式三点格式),则最快波不可能传播多于 1 个网格点的距离.因而必须使 CFL≤1,否则计算会不稳定.一般情况下,格式的稳定性条件由 CFL 数给定,往往不能大于某一值.根据稳定性要求选取 CFL 后,便由 $k_j = \mathrm{CFL}h_j/\lambda_j^{(\max)}$ 计算时间步长.显然,各网格点 j 所允许的时间步长可以不一样.对于非定常问题,要求各点使用统一的时间步长(均匀时间步长),此时必须取各点所允许的时间步长的最小值

$$k = \min(k_j).$$

对于定常问题计算,时间精度不重要。此时每个网格点上可以使用当地时间步长 k_j.在使用当地时间步长的情况下,可以证明,非线性(标量)方程在非均匀网格上的格式近似等于在均匀网格上线性问题的格式(见第六章 6.5 节).因线性问题容易收敛,所以使用当地时间步长可以加快收敛速度.第 n 个时间步对应的时刻为 $t_j^n = t_j^{n-1} + k_j (t_j^0 = 0)$.

3)数值解的定义.在时间步 n,网格点 j 上的数值解定义为

$$w_j^n \approx w(t_j^n, x_j).$$

此时称数值解定义在网格节点上.有时也把数值解定义在网格中点(格心)$x_j^{(c)} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1})$上.只有在涉及边界条件或在以后介绍的有限体积法构造格式时,这种区别才真正重要.数值计算所求的就是 w_j^n.

4)格式的构造.在偏微分方程中用有限差分、有限元或其他方法代替偏微分,便获得所需要的格式.为了简单,考虑均匀网格 $h_j = h$ 与均匀时间步长 $k_j = k$,并记 $k/h = \sigma$.则格式的一般形式可以写成

$$\sum_{\tau=-1}^{s} H_\tau(w_{j-l}^{n-\tau}, \ldots, w_{j-1}^{n-\tau}, w_j^{n-\tau}, w_{j+1}^{n-\tau}, \ldots, w_{j+r}^{n-\tau}, \sigma) = 0. \tag{4.1}$$

这里 H_τ 一般为非线性函数,$s(s \geqslant -1)$为某整数,l, r 为非负整数.格式(4.1)涉及 $s+2$ 个时间层和 $l+r+1$ 个空间点的值,因此可以称为 $s+2$ 层格式或 $l+r+1$ 点格式.也称格式的带宽为 $l+r+1$.如果格式精度高而且宽度窄,则称为紧致格式.如果

$$H_{-1}(w_{j-l}^{n+1}, \ldots, w_{j-1}^{n+1}, w_j^{n+1}, w_{j+1}^{n+1}, \ldots, w_{j+r}^{n+1}, \sigma) = w_j^{n+1},$$

则任意网格点 j 上最新时刻 $n+1$ 的值除本点外只与时刻 $\leqslant n$ 的值有关,因此称为显式格式.

在一般情况下,任意网格点上最新时刻 $n+1$ 的值与其他网格点时刻 $n+1$ 的值有关,此时称为隐式格式.

如果 $s \geqslant 0$(即格式至少包含两个时间层),则称为时间相关格式.如果 $s = -1$,则格式与时间无关,可以简化为

$$H(w_{j-l},\dots,w_{j-1},w_j,w_{j+1},\dots,w_{j+r},\sigma)=0.$$

这里 $H=H_{n+1}, w_j=w_j^{n+1}$. 如果 H 为非线性函数,则需要用类似于牛顿法的迭代方法求解. 一般用时间相关格式求解非定常问题. 在实际计算中,人们也使用时间相关格式(时间推移格式或伪非定常方法)计算定常问题. 给定 w_j^0 后,通过时间迭代,由时间步 n 的数值解求时间步 $n+1$ 的数值解. 对于非定常问题,将保存某些时刻的值. 对于定常问题,时间迭代是为了获得收敛解

$$w_j=w_j^n|_{n\to\infty}.$$

实际上,即使针对定常问题,也不可能计算无穷多步. 一般算到数值解变化小到可以接受的情况便认为获得了定常解. 这种可接受的程度按第五章定义的残值衡量.

如果格式中所有的偏微分都用数值方法代替,则称为全离散格式. 如果只是时间导数或空间导数用数值方法代替,则相应的格式称为半离散格式.

最经典的数值方法是有限差分法. 后来发展了一系列的特殊方法,如有限元法、谱方法、准谱方法,等等. 这些特殊方法只是对空间离散的一种不同于有限差分的特殊处理. 还有基于将方程写成特殊形式的玻尔兹曼方法、格子气方法、拉格朗日方法、涡方法等特殊方法. 但特殊方法往往针对特殊用途,没有有限差分法那样能普遍应用. 单从有限差分法便可了解计算流体力学数值方法的全貌. 所以往后只介绍有限差分法.

有限差分方法属于求解偏微分方程的最经典和最流行的方法. 构造有限差分方法的最简单步骤为:

- 将一维、二维、三维计算空间划分成线段、四边形、六面体网格单元.
- 将偏微分方程写成计算坐标系形式. 对其中的每项导数均通过泰勒展开方法构造差分.
- 将偏微分方程中的偏微分用有限差分代替,得有限差分方程.

4.2 有限差分法

4.2.1 有限差分的定义

令 ϕ_x 为任意光滑函数 ϕ 的空间偏导数(时间偏导数可以用类似办法讨论). 由导数定义[①]

$$\phi_x=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\phi\left(x+\frac{1}{2}\delta x\right)-\phi\left(x-\frac{1}{2}\delta x\right)}{\delta x}. \tag{4.2}$$

在式(4.2)的右边令 $\delta x=h>0$,便得

$$\phi_x\approx\frac{1}{h}\delta\phi. \tag{4.3}$$

① 也可以定义为: $\phi_x=\lim\limits_{\delta x\to 0}\frac{\phi(x+\delta x)-\phi(x)}{\delta x}$.

这里 $\delta\phi=\phi\left(x+\frac{1}{2}h\right)-\phi\left(x-\frac{1}{2}h\right)$定义了最简单的差分.

在网格点 j,导数$(\phi_x)_j$ 可以近似为

$$(\phi_x)_j \approx \frac{\phi_{j+1}-\phi_{j-1}}{2h}. \tag{4.4}$$

因导数还可以定义成

$$\phi_x=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\phi(x+\delta x)-\phi(x)}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\phi(x)-\phi(x-\delta x)}{\delta x},$$

所以$(\phi_x)_j$ 也可以近似为

$$(\phi_x)_j \approx \frac{\phi_{j+1}-\phi_j}{h}, \tag{4.5}$$

$$(\phi_x)_j \approx \frac{\phi_j-\phi_{j-1}}{h}. \tag{4.6}$$

关系式(4.4)、(4.5)和(4.6)分别叫中心差分、向前差分和向后差分。向前差分与向后差分也称为单侧差分.

4.2.2 差分构造的一般方法

设导数 $\phi_x(x_j)$的有限差分的一般表达式为

$$L=L(\phi_{j-l},\ldots,\phi_{j-1},\phi_j,\phi_{j+1},\ldots\phi_{j+r};h).$$

定义 4.1 如果

$$L(\phi_{j-l},\ldots,\phi_{j-1},\phi_j,\phi_{j+1},\ldots\phi_{j+r};h)|_{h\to 0}=\phi_x,$$

则称 L 与ϕ_x 相容.

定义当地截断误差

$$R=L(\phi_{j-l},\ldots,\phi_{j-1},\phi_j,\phi_{j+1},\ldots\phi_{j+r};h)-(\phi_x)_j.$$

定义 4.2 如果 $R=Th^p+o(h^p)$,则有限差分具有 p 阶精度.

由泰勒展开得

$$\frac{\phi_{j+1}-\phi_{j-1}}{2h}=\phi_x+\frac{h^2}{3!}\phi_{xxx}+\frac{h^4}{5!}\phi_{xxxxx}+\ldots=\phi_x+O[h^2].$$

因此中心差分(4.4)具有二阶精度.类似可以证明,单侧差分(4.5)和(4.6)只具有一阶精度.

用中心差分来代替 N－S方程中的对流项往往存在稳定性问题.而单侧差分精度太低.另外对于流动机理研究可能需要 3 阶以上的精度.因此必需探讨获得高精度差分的方法.

4.2.2.1 泰勒展开方法

考虑$(\phi_x)_j$ 差分近似的一般形式

$$(\phi_x)_j = \frac{1}{h}\sum_{\nu=-l}^{\nu=r} a_\nu \phi_{j+\nu} + O[h^p], \tag{4.7}$$

其中的系数 $a_\nu, \nu=-l,\ldots,-1,0,1,\ldots,r$ 按精度要求用泰勒展开办法确定. 设精度为 p 阶. 由泰勒展开得

$$\phi_{j+\nu} = \phi_j + \nu h\phi_j^{(1)} + \frac{1}{2!}(\nu h)^2\phi_j^{(2)} + \ldots + \frac{1}{q!}(\nu h)^q\phi_j^{(k)} + \ldots.$$

这里 $\phi^{(q)}$ 表示 ϕ 的 q 阶导数.

将上式代入(4.7)得

$$\frac{1}{h}\sum_{\nu=-l}^{\nu=r} a_\nu\phi_{j+\nu} = \frac{1}{h}\sum_{\nu=-l}^{\nu=r} a_\nu\phi_j + \sum_{\nu=-l}^{\nu=r} \nu a_\nu\phi_j^{(1)} + \frac{h}{2!}\sum_{\nu=-l}^{\nu=r} \nu^2 a_\nu\phi_j^{(2)}$$
$$+ \ldots + \frac{h^{q-1}}{q!}\sum_{\nu=-l}^{\nu=r} \nu^q a_\nu\phi_j^q \ldots.$$

为了获得 q 阶精度,必需满足如下条件

$$\sum_{\nu=-l}^{\nu=r} a_\nu = 0 \text{ (齐次化要求)},$$

$$\sum_{\nu=-l}^{\nu=r} \nu a_\nu = 1 \text{ (相容性要求)},$$

$$\sum_{\nu=-l}^{\nu=r} \nu^2 a_\nu = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{\nu=-l}^{\nu=r} \nu^q a_\nu = 0.$$

这样就得到 q+1 个线性无关的表达式. 而共有 $l+r+1$ 个待定参数. 上面代数方程组的系数矩阵为范德蒙矩阵,可以求逆. 因此,下面结论成立:

推论 4.1　令 $q=l+r$. 对给定的 l 和 r,存在唯一组参数

$$a_\nu, \nu=-l,\ldots,-1,0,1,\ldots,r,$$

使得差分(4.7)具有 q 阶精度.

4.2.2.2　算　子　法

首先定义一些有用的算子:

D: 微分算子,
μ: 平均算子,
E, E^{-1}: 位移算子,
E^ν: 复合位移算子,
δ^+:向前差分算子,
δ^-:向后差分算子,
δ:(半)中心差分算子,
$\bar{\delta}$:(全)中心差分算子,

上述算子的具体表达式为

$$
\begin{aligned}
&D\phi_j = (\phi_x)_j,\\
&\mu\phi_j = \frac{1}{2}(\phi_{j+\frac{1}{2}} + \phi_{j-\frac{1}{2}}),\\
&\mu\phi_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi_j + \phi_{j+1}),\\
&E\phi_j = \phi_{j+1}, E^{-1}\phi_j = \phi_{j-1},\\
&E^{\nu}\phi_j = \phi_{j+\nu}, \nu \in \mathbf{Z},\\
&\delta^+\phi_j = \phi_{j+1} - \phi_j,\\
&\delta\ \ \phi_j = \phi_j - \phi_{j-1},\\
&\delta\phi_j = \phi_{j+\frac{1}{2}} - \phi_{j-\frac{1}{2}},\\
&\bar{\delta}\phi_j = \delta\mu\phi_j = \frac{1}{2}(\phi_{j+1} - \phi_{j-1}),\\
&\delta\phi_{j+\frac{1}{2}} = \phi_{j+1} - \phi_j.
\end{aligned}
$$

以下是一些有用的算子关系式

$$
\begin{aligned}
&\mu = \frac{1}{2}(E^1 + E^{-1}),\\
&\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}},\\
&\bar{\delta} = \frac{1}{2}(E^1 - E^{-1}),\\
&\delta^+ = E - 1,\\
&\delta^- = 1 - E^{-1},\\
&\delta^- = E^{-1}\delta^+,\\
&\delta^{+q} = (E-1)^q,\\
&\delta^{-q} = (1 - E^{-1})^q,\\
&\bar{\delta}^q = \left(\frac{E - E^{-1}}{2}\right)^q,\\
&\delta^+\delta^- = \delta^-\delta^+ = \delta^+ - \delta^- = 2\tilde{\delta}^2,\\
&E = e^{hD},\\
&hD = \ln E,\\
&\bar{\delta} = \frac{E - E^{-1}}{2} = \sinh(hD).
\end{aligned}
$$

将泰勒展开

$$
\delta_{j+1} = \phi_j + \frac{1}{1!}h\phi_j^{(1)} + + \frac{1}{2!}h^2\phi_j^{(2)} + \dots,
$$

写成 $E\phi_j = e^{hD}\phi_j$，便可导出关系式 $E = e^{hD}$.

用算子关系式

$$
\begin{aligned}
&hD = \ln E,\\
&E = 1 + \delta^+ = \frac{1}{1 - \delta^-},\\
&hD = \sinh^{-1}\bar{\delta}
\end{aligned}
$$

和泰勒展开,便可得到下面的向前、向后的中心差分式子

$$hD=\delta^{+}-\frac{\delta^{+2}}{2}+\frac{\delta^{+3}}{3}-\frac{\delta^{+4}}{4}+\ \ldots, \tag{4.8}$$

$$hD=\delta^{-}+\frac{\delta^{-2}}{2}+\frac{\delta^{-3}}{3}+\frac{\delta^{-4}}{4}+\ldots, \tag{4.9}$$

$$hD=\bar{\delta}-\frac{1}{6}\bar{\delta}^{3}+\frac{3}{2\cdot4\cdot5}\bar{\delta}^{5}+\ldots. \tag{4.10}$$

通过用泰勒展开分析,得下面的误差估计:

引理 4.1　$\delta^{\mp k}=O[h^{k}]$, $\bar{\delta}^{k}=O[h^{k}]$.

因此下面的结论成立:

推论 4.2　如果在关系式(4.8)和(4.9)中保留前 q 项,则所得的向前和向后差分都具有 q 阶精度;如果在关系式(4.10)中保留前 q 项,则所得的差分具有$(2q)$阶精度.

例如在(4.8)和(4.9)中保留前两项,便得如下的二阶差分表达式

$$\phi_{j}^{(1)}=\frac{-3\phi_{j}+4\phi_{j+1}-\phi_{j+2}}{2h}+\frac{h^{2}}{3}\phi_{j}^{(3)}, \tag{4.11}$$

$$\phi_{j}^{(1)}=\frac{3\phi_{j}-4\phi_{j-1}+\phi_{j-2}}{2h}+\frac{h^{2}}{3}\phi_{j}^{(3)}. \tag{4.12}$$

对于更高精度的差分式子,可以用同类方法获得.

4.2.2.3　隐式方法

在泰勒展开方法与算子法中,差分算子都逐点定义,即通过显式方法定义.在这里介绍的隐式方法(也称哈米顿方法、紧致方法、样条方法、紧致隐式方法、PADE 方法等)中,各网格点 j 上的差分通过一线性系统耦合起来.

以(4.11)为例.令

$$hD=\delta^{+}-\frac{1}{2}\delta^{+2}+O[h^{3}]=\frac{\delta^{+}}{1+\frac{1}{2}\delta^{+}}+O[h^{3}].$$

由此得到

$$\left(1+\frac{1}{2}\delta^{+}\right)D=\frac{1}{h}\delta^{+}+O[h^{2}],$$

即

$$\frac{1}{2}(\phi_{j}^{(1)}+\phi_{j+1}^{(1)})=\frac{\phi_{j+1}-\phi_{j}}{h}+O[h^{2}]. \tag{4.13}$$

需(用追赶法)对隐式系统(4.13)求逆以获得所有网格点 j 上的 $\phi_{j}^{(1)}$.

存在获得隐式差分算子的较系统的方法(Peyret & Taylor,1982).以三点隐式差分为例,先写成以下一般形式

$$L(\phi_{j},\phi_{j}^{(1)})=0. \tag{4.14}$$

这里 $L(\phi_{j},\phi_{j}^{(1)})=\sum_{l=-1}^{1}a_{l}\phi_{j+l}+\sum_{l=-1}^{1}b_{l}\phi_{j+l}^{(1)}$.

下面按所需要的精度来定义参数 $a_{+1},a_{0},a_{-1},b_{+1},b_{0},b_{-1}$.考虑(4.14)的齐次性,可以令其中一个参数为自由参数,从而只有 5 个未知数.式(4.14)的截断误差定义为

$$R=L(\phi,\phi_x).$$

这里 ϕ 和 ϕ_x 为精确解及其微分.用泰勒展开得

$$\begin{aligned}R = & \sum_{\nu=-1}^{\nu=1} a_\nu \phi_j \\ & + \left(h\sum_{\nu=-1}^{\nu=1}\nu a_\nu + \sum_{\nu=-1}^{\nu=1} b_\nu\right)\phi_j^{(1)} \\ & + \left(\frac{h^2}{2!}\sum_{\nu=-1}^{\nu=1}\nu^2 a_\nu + h\sum_{\nu=-1}^{\nu=1}\nu b_\nu\right)\phi_j^{(2)} \\ & + \left(\frac{h^3}{3!}\sum_{\nu=-1}^{\nu=1}\nu^3 a_\nu + \frac{h^2}{2!}\sum_{\nu=-1}^{\nu=1}\nu^2 b_\nu\right)\phi_j^{(3)} \\ & \vdots \\ & + \left(\frac{h^q}{q!}\sum_{\nu=-1}^{\nu=1}\nu^q a_\nu + \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}\sum_{\nu=-1}^{\nu=1}\nu^{q-1} b_\nu\right)\phi_j^{(q)} \\ = & c_{0,0}\phi_j + (c_{1,0}+c_{1,1}h)\phi_j^{(1)} \\ & + (c_{2,1}h + c_{2,2}h^2)\phi_j^{(2)} \\ & + (c_{3,2}h^2 + c_{3,3}h^3)\phi_j^{(3)} \\ & + (c_{4,3}h^3 + c_{4,4}h^4)\phi_j^{(4)} \\ & + (c_{5,4}h^4 + c_{5,5}h^5)\phi_j^{(5)} \\ & \cdots .\end{aligned}$$

为了获得二阶精度,令

$$c_{0,0}=0,\ c_{1,0}+hc_{1,1}=0,\ c_{2,1}+hc_{2,2}=0.$$

由此得到 5 个未知数的 3 个关系式.因此可以获得一族含有 2 个自由参数的 2 阶隐式差分算子.令 $b_+/b_0=\alpha$ 和 $b_-/b_0=\beta$ 为自由参数,则 2 阶精度格式为

$$\frac{\beta-3\alpha-1}{2h}\phi_{j+1}+\frac{2(\alpha-\beta)}{h}\phi_j+\frac{3\beta-\alpha+1}{2h}\phi_{j-1}+\alpha\phi_{j+1}^{(1)}+\phi_j^{(1)}+\beta\phi_{j-1}^{(1)}=0.$$

进一步令 $c_{3,2}h^2+C_{3,3}h^3=0$,便得到含有一个自由参数的 3 阶精度格式

$$\frac{5\alpha+1}{h}\phi_{j+1}+\frac{4(1-\alpha)}{h}\phi_j-\frac{5+\alpha}{h}\phi_{j-1}-2[\alpha\phi_{j+1}^{(1)}+2(1+\alpha)\phi_j^{(1)}+\phi_{j-1}^{(1)}]=0.$$

截断误差(保留主部)为

$$R=\frac{h^3}{12}(\alpha-1)\phi^{(4)}+\frac{h^4}{60}(1+\alpha)\phi^{(5)}.$$

式(4.14)的最高精度是 4 阶,具体形式为

$$\frac{3}{h}\phi_{j+1}-\frac{3}{h}\phi_{j-1}-(\phi_{j+1}^{(1)}+4\phi_j^{(1)}+\phi_{j-1}^{(1)})=0.$$

相应的截断误差(主部)为

$$R=\frac{h^4}{30}\phi^{(5)}.$$

从推论 4.1 知三点显式格式的最高精度为 2 阶,而三点隐式格式的最高精度为 4 阶.由此可以看隐式格式的优越性.当然,隐式差分需要对隐式系统求逆,才能获得各点的导数值.

但所浪费的计算时间与所获得的高精度相比可以忽略.事实上,精度越高,使用的网格点数量越少,总的计算量可以减少.

通过使用更高阶导数,便可获得更高阶差分,这便是超紧致方法(Fu & Ma.,1995).

一般三点超紧致差分可以写成

$$\sum_{\eta=0}^{q}(a_0^{(\eta)}\phi_{j+1}^{(\eta)}+b_0^{(\eta)}\phi_j^{(\eta)}+c_0^{(\eta)}\phi_{j-1}^{(\eta)})=0.$$

加导数 $\phi_j^{(\eta)}(\eta\geqslant 2)$的补充关系式

$$\sum_{\eta=\xi}^{q}(a_\xi^{(\eta)}\phi_{j+1}^{(\eta)}+b_\xi^{(\eta)}\phi_j^{(\eta)}+c_\xi^{(\eta)}\phi_{j-1}^{(\eta)})=0,\quad \xi=1,2,\ldots,q-1.$$

上面式子也可写成如下的算子形式

$$L_{+1}\Phi_{j+1}+L_0\Phi_j+L_-\Phi_{j-1}=a_0^{(0)}Y_{j+1}+b_0^{(0)}Y_j+c_0^{(0)}Y_{j-1}.$$

这里 L_{+1},L_0,L_{-1}为 $q\times q$ 系数矩阵,另外 $\Phi=(\phi^{(1)},\phi^{(2)},\ldots,\phi^{(q)})^t$, $Y=(-\phi,0,\ldots,0)^t$.

通过泰勒展开,便可确定系数以获得所需要的精度.

4.2.3　运输方程的简单差分格式

考虑运输方程

$$u_t+au_x=0.\tag{4.15}$$

为了获得时间相关格式,空间微分 u_x 可以用前面介绍的任意差分代替,时间微分 u_t 可以用中心差分

$$u_t\approx\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2k},$$

或者向前差分

$$u_t\approx\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{k},$$

代替.

下面的简单格式属于经典格式,常用于做理论分析.

A. 跳蛙格式(三层三点显式格式)

$$u_j^{n+1}-u_j^{n-1}=-\frac{ak}{h}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n).\tag{4.16}$$

B. 纯中心差分格式(两层三点显式格式,该格式不稳定)

$$u_j^{n+1}-u_j^n=-\frac{ak}{2h}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n).\tag{4.17}$$

C. Lax 格式(两层三点显式格式)[1]

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)-\frac{ak}{2h}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n).$$

D. 迎风格式(两层两点显式格式)[2]

$$u_j^{n+1}-u_j^n=-\frac{ak}{h}(u_j^n-u_{j-1}^n). \tag{4.18}$$

E. 欧拉向后格式(两层三点隐式格式)

$$u_j^{n+1}+\frac{ak}{2h}(u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1})=u_j^n. \tag{4.19}$$

4.2.4　高阶微分的差分

对于N－S方程，粘性项具有二阶导数.对于欧拉方程，虽然只有一阶导数，但某些格式(如以后将要介绍的 Lax-Wendroff 格式)的构造需要用到高阶导数.

高阶导数的差分可以用与前面一阶导数差分类似的方法构造.下面考虑 ϕ_{xx} 的差分逼近.

4.2.4.1　泰勒展开方法

令

$$\phi_{xx}\approx L(\phi_j)=a\phi_{j+1}+b\phi_j+c\phi_{j-1}.$$

用泰勒展开得

$$L(\phi_j)=(a+b+c)\phi_j+(a-c)h\phi_j^{(1)}+\frac{a+c}{2}h^2\phi_j^{(2)}+O[h^3].$$

因 $\phi_{xx}\approx L(\phi_j)$，所以必须令

$$a+b+c=0,$$
$$(a-c)h=0,$$
$$\frac{a+c}{2}h^2=1.$$

所以相应的系数为

$$a=\frac{1}{h^2},b=-\frac{2}{h^2},c=\frac{1}{h^2}.$$

由此得到下面的差分表达式

$$L(\phi_j)=\frac{\phi_{j+1}-2\phi_j+\phi_{j-1}}{h^2}. \tag{4.20}$$

---

[1] 在格式(4.17)中将 u_j^n 用 $\frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)$ 代替.

[2] 前提条件为 $a>0$，否则格式不稳定.对于 $a<0$，稳定格式为

$$u_j^{n+1}-u_j^n=-\frac{ak}{h}(u_{j+1}^n-u_j^n).$$

因 $L(\phi)=h^2\phi^{(3)}+\frac{h^3}{12}\phi^{(4)}+O[h^4]$,所以三点中心差分(4.20)具有二阶精度.

为了获得更高阶精度,可以构造三点以上的差分.

4.2.4.2 算 子 法

前面已经得到

$$D\phi_j=-\frac{1}{h}\ln(1-\delta^-)\phi_j.$$

对上式在使用同样的算子得①

$$\phi_{xx}\stackrel{\triangle}{=\!=}D^2\phi_j=-\frac{1}{h^2}[\ln(1-\delta^-)]^2\phi_j.$$

用泰勒展开,有

$$[\ln(1-\delta^-)]^2=\left(\delta^-+\frac{\delta^{-2}}{2}+\ldots\right)^2=\delta^{-2}+\delta^{-3}+\frac{11}{12}\delta^{-4}+\ldots.$$

如果只保留第一项,便获得具有一阶精度的向后差分

$$(\phi_{xx})_j=\frac{1}{h^2}\delta^{-2}\phi_j=\frac{\phi_j-2\phi_{j-1}+\phi_{j-2}}{h^2}+h\phi^{(3)}+O[h^2].$$

如果保留前二项,则得具有二阶精度的向后差分:

$$(\phi_{xx})_j=\frac{2\phi_j-5\phi_{j-1}+4\phi_{j-2}-\phi_{j-3}}{h^2}-\frac{11}{12}h^2\phi^{(4)}+O[h^3].$$

与此类似,如果向前差分和中心差分算子关系式,并且在泰勒展开中保留前二项,便得到二阶精度的向前差分

$$(\phi_{xx})_j=\frac{2\phi_j-5\phi_{j+1}+4\phi_{j+2}-\phi_{j+3}}{h^2}+\frac{11}{12}h^2\phi^{(4)}+O[h^3],$$

和四阶精度的向后差分

$$(\phi_{xx})_j=\frac{-\phi_{j+2}+16\phi_{j+1}-30\phi_j+16\phi_{j-1}-\phi_{j-2}}{12h^2}+\frac{1}{90}h^4\phi^{(6)}+O[h^8].$$

4.2.4.3 隐式方法

令

$$L(\phi_j,\phi_j^{(1)},\phi_j^{(2)})=\sum_{l=-1}^{l=1}a_l\phi_{j+l}+\sum_{l=-1}^{l=1}b_l\phi_{j+l}^{(1)}+\sum_{l=-1}^{l=1}c_l^{(2)}\phi_{j+l}^{(2)}=0.$$

在网格点 j 对上式进行泰勒展开,在规定的精度下保留适当的项,便可以得到相应的隐式

① 可以证明

$$D^q\phi_j=-\frac{1}{h^q}[\ln(1-\delta^-)]^q\phi_j.$$

差分关系式,最高精度的三点差分表达式为

$$\frac{24}{h^2}(\phi_{j+1}-2\phi_j+\phi_{j-1})+\frac{9}{h}(\phi_{j+1}^{(1)}-\phi_{j-1}^{(1)})+\phi_{j+1}^{(2)}-8\phi_j^{(2)}+\phi_{j-1}^{(2)}=0.$$

相应的截断误差为

$$R=\frac{2}{8!}h^6\phi^{(8)}.$$

4.3 非线性守恒系统的数值方法

前面介绍了有限差分的一般方法.对于流体力学的一般方程,应考虑如下特殊性:

(1)对于非线性问题,必需将方程写成守恒形式以获得正确的弱解.相应地,差分方法也应写成某种数值意义下的守恒形式.

(2)针对波的移动方向不同可以有不同的处理方法.而对于欧拉方程,不同特征分量的波的移动方向不一样,所以得分开处理.

(3)前面构造差分方法时,假定解是光滑的.而对于可压缩流动,存在激波和滑移线等间断.这些都需要特殊处理.

考虑具有弱解的非线性守恒系统

$$w_t+f(w)_x=0. \tag{4.21}$$

4.3.1 守恒格式及几种表现形式

物理意义下的守恒就是物质、动量和能量不能自己产生与消灭[①].第三章讲到,守恒变量的对(没有边界的)空间的积分不随时间变化.对于数值解,它的积分(数值积分)也不应该随时间变化.由此导出了数值方法守恒的概念.

定义 4.3　如果格式能使关系式

$$\sum_j h_j w_j^{n+1}=\sum_j h_j w_j^n,\ \forall\, n, \tag{4.22}$$

满足,则称为守恒格式.

半离散形式的守恒格式一般可以写成

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=-\frac{f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)}-f_{j-\frac{1}{2}}^{(*)}}{h}. \tag{4.23}$$

这里 $f_{j+1/2}^{(*)}$ 称为数值通量.对于 $l+r+1$ 点格式,数值通量的函数形式为

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)}=f^{(*)}(w_{j-l+1},\ldots,w_j,w_{j+1},\ldots,w_{j+r}).$$

它必需满足下面的相容性关系式

① 至少对经典物理学如此.

$$f^{(*)}_{j+\frac{1}{2}} = f^{(*)}(w,\ldots,w,w,\ldots,w) = f(w).$$

全离散形式的守恒格式一般写为

$$w_j^{n+1} - w_j^n = -\sigma\left(f^{(*)}_{j+\frac{1}{2}} - f^{(*)}_{j-\frac{1}{2}}\right), \sigma = \frac{k}{h}, \tag{4.24}$$

这里

$$f^{(*)}_{j+\frac{1}{2}} = f^{(*)}\left((w^{n+1}_{j+\nu})_{-l+1\leqslant\nu\leqslant r}, (w^{n}_{j+\nu})_{-l+1\leqslant\nu\leqslant r},\ldots;\sigma\right).$$

为满足下面相容性条件的数值通量

$$f^{(*)}((w),(w),\ldots,(w);\sigma) = f(w).$$

例如,两层显式守恒格式的一般形式为

$$w_j^{n+1} - w_j^n = -\frac{k}{h}\left(f^{(*)}_{j+\frac{1}{2}} - f^{(*)}_{j-\frac{1}{2}}\right).$$

这里 $f^{(*)}_{j+\frac{1}{2}} = f^{(*)}(w^n_{j-l+1}, w^n_{j-l+2},\ldots,w^n_{j+r};\sigma)$.

第五章将看到,守恒格式可以自动算出激波并给出其正确的位置,因此这种数值方法称为激波捕获法.如果使用非守恒格式,则需要在有关位置使用局部 R－H 条件,以获得正确的激波位置,这种方法称为激波镶嵌法.

尽管在程序中应该使用格式的数值通量形式,但有时写成其他形式分析起来更方便.定义

$$Q_{j+\frac{1}{2}} = \sigma\frac{f_j + f_{j+1} - 2f^{(*)}_{j+\frac{1}{2}}}{w_{j+1} - w_j},$$

则任何守恒格式都可以写成

$$w_j^{n+1} - w_j^n = -\sigma(f^n_{j+1} - f^n_{j-1}) + \frac{1}{2}\left[Q_{j+\frac{1}{2}}(w^n_{j+1} - w^n_j) - Q_{j-\frac{1}{2}}(w^n_j - w^n_{j-1})\right]. \tag{4.25}$$

对于运输方程,如果系数 Q 为常数,则上述格式可以展开成下面形式

$$u_j^{n+1} - u_j^n = -au_x + Qh^2u_{xx} + K_1u_{xxx} + K_2u_{xxxx} + \ldots.$$

这里 K_1,K_2 为网格尺寸的函数.很显然,Q 的作用类似于物理黏性系数,因此称 $Q_{j+\frac{1}{2}}$ 为数值黏性系数.称(4.25)为格式的黏性形式.这种形式的特点是,无论格式本身为几点格式,其黏性形式类似于三点格式,其他点的作用均被包含在数值黏性系数之中.

另外还可以将格式写成增量形式

$$\triangle w_j = C_{j+\frac{1}{2}}\delta^+ w_j - D_{j-\frac{1}{2}}\delta^- w_j. \tag{4.26}$$

这里 $\triangle w_j = w_j^{n+1} - w_j^n$ 为数值解的时间增量

$$C_{j+\frac{1}{2}} = C(w_{j-l+1}, w_{j-l+2},\ldots,w_{j+r}),$$

$$D_{j-\frac{1}{2}} = D(w_{j-l}, w_{j-l+1},\ldots,w_{j+r-1}).$$

对于标量方程,如果

$$C_{j+\frac{1}{2}}\geqslant 0, D_{j+\frac{1}{2}}\geqslant 0, C_{j+\frac{1}{2}} + D_{j+\frac{1}{2}}\leqslant 1, \tag{4.27}$$

则格式称为正增量格式. 如果

$$C_{j+\frac{1}{2}}\geqslant 0, D_{j-\frac{1}{2}}\geqslant 0, C_{j+\frac{1}{2}}+D_{j-\frac{1}{2}}\leqslant 1, \tag{4.28}$$

则格式所有系数为正,从而称为正系数格式.

4.3.2 中心格式

如果所有的空间导数均用中心差分代替,则所获得的格式称为中心格式. 在中心格式中, $r=l$.

4.3.2.1 简单中心差分格式

最简单的半离散中心差分格式为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{h}(f_{j+\frac{1}{2}}-f_{j-\frac{1}{2}}). \tag{4.29}$$

这里 $f_{j+\frac{1}{2}}=f(w_{j+\frac{1}{2}})$ 或者 $f_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(f(w_j)+f(w_{j+1}))$.

如果用欧拉向后差分代替(4.29)中的时间导数,便得到如下的(不稳定)显式中心差分格式

$$w_j^{n+1}=w_j^n-\frac{\sigma}{2}(f_{j+1}^n-f_{j-1}^n).$$

如果用中心差分代替时间导数,便得跳蛙格式

$$w_j^{n+1}=w_j^{n-1}-\sigma(f_{j+1}^n-f_{j-1}^n).$$

如果用欧拉向后差分,则得隐式中心差分格式

$$w_j^{n+1}+\frac{\sigma}{2}(f_{j+1}^{n+1}-f_{j-1}^{n+1})=w_j^n.$$

将通量函数线性化后,便得 Beaming-Warming 格式

$$\triangle w_j+\frac{\sigma}{4}(A_{j+1}\triangle w_{j+1}-A_{j-1}\triangle w_{j-1})=\frac{\sigma}{2}(f_{j+1}^n-f_{j-1}^n).$$

对空间导数使用高阶差分,便得高阶中心差分格式. 例如 Kreiss-Oliger 格式为:

$$w_j^{n+1}=w_j^{n-1}-\frac{\lambda}{6}(8f_{j+1}^n-8f_{j-1}^n-f_{j+2}^n+f_{j-2}^n).$$

4.3.2.2 人工黏性

上面的简单中心差分格式对于线性问题往往能给出较好的结果. 但对于非线性问题可能出现非线性不稳定. 考虑伯格斯方程 $u_t+\left(\frac{1}{2}u^2\right)_x=0$ 的半离散格式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{h}(f(u_{j+\frac{1}{2}})-f(u_{j-\frac{1}{2}})).$$

假设精确解为 $\overline{u}(x)=S(t)x$,这里 $S>0$. 将上述方程线性化,即令

$$u = \bar{u} + u',$$

使得

$$\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t} = -\frac{\bar{u}_j}{2h}(u'_{j+1} - u'_{j-1}) - \frac{S}{2h}(u'_{j+1} - 2u'_j + u'_{j-1}). \tag{4.30}$$

因

$$u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} = h^2 u_{xx} + O[h^4],$$

所以由(4.30)得到下面的方程

$$\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t} = -Sxu'_x - S\frac{h}{2}u'_{xx} + O[h^2].$$

如果空间步长有限,并且忽略高解小量,则上述方程为抛物型方程.其2阶导数项的系数(黏性系数)为负.由偏微分方程理论知,系数为负的抛物型方程是病态的、不稳定的.

为了消除非线性不稳定,必需添加人工黏性,以平衡掉上面的负黏性影响.例如,可以在上述格式右端添加$\frac{1}{2}Q(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})$.这里$Q>0$称为人工黏性系数.修改后的格式为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\bar{u}_j}{2h}(u'_{j+1} - u'_{j-1}) + \left(\frac{Q}{2} - \frac{S}{2h}\right)(u'_{j+1} - 2u'_j + u'_{j-1}) \\ &\approx -Sxu'_x + \left(\frac{h^2Q}{2} - \frac{hS}{2}\right)u'_{xx}.\end{aligned}$$

如果人工黏性系数足够大,总的黏性系数$\left(\frac{h^2}{2}Q - \frac{h}{2}S\right)$便为正.

某些格式具有内含的(正)数值黏性系数.考虑 Lax-Wendroff 格式

$$w_j^{n+1} - w_j^n = -\sigma\left(f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)} - f_{j-\frac{1}{2}}^{(*)}\right),$$

这里

$$f^* = \frac{1}{2}(f_j^n + f_{j+1}^n) - \frac{\sigma^2}{2}A_{j+\frac{1}{2}}^2(w_{j+1}^n - w_j^n).$$

显然,数值黏性系数$Q = \sigma A^2$为正.以后谈到的迎风格式也具有内含的正黏性系数.

某些格式即使具有内含的数值黏性,也不一定能平衡掉非线性效应代来的负黏性,所以也可能需要添加人工黏性.将数值黏性

$$\frac{1}{2}Q(w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1})$$

添加在(4.29)的右端,便得

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{h}(f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}Q(w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}).$$

人工黏性系数Q可以是(正)标量,也可以是(正定)矩阵.例如,如果取$Q=1$并且用向前差分代替时间导数,便得 Lax 格式

$$w_j^{n+1} - w_j^n = -\frac{k}{h}(f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{1}{2}(w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n).$$

上式也可以写成

$$w_j^{n+1} = \frac{1}{2}(w_{j+1}^n + w_{j-1}^n) - \frac{k}{h}(f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}).$$

4.3.2.3　数值振荡

考虑运输方程 $u_t + au_x = 0 (a > 0)$ 与间断解

$$u_j^0 = 1, j \leqslant J; u_j^0 = 0, j > J. \tag{4.31}$$

使用 Lax-Wendroff 格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

这里 $\lambda = \frac{ak}{h}$.

令 $\lambda = 0.5$ 并把格式写成

$$u_j^{n+1} = \frac{\lambda^2 + \lambda}{2} u_{j-1}^n + (1 - \lambda^2) u_j^n + \frac{\lambda^2 - \lambda}{2} u_{j+1}^n = 0.375 u_{j-1}^n + 0.75 u_j^n - 0.125 u_{j+1}^n.$$

现在人工计算 $n \geqslant 1$ 时的数值解. 当 $n = 1$ 时,解得

$$u_j^1|_{j<J} = 1; u_J^1 = 1.125;$$

$$u_{J+1}^1 = 0.375; u_j^1|_{j>J+1} = 0.$$

进一步求得 $n = 2$ 时的解为(见图 4.1)

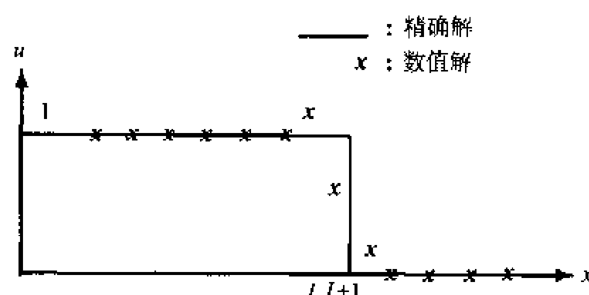


图 4.1　时刻 $n = 2$ 时的数值解

$$u_j^1|_{j<J-1} = 1;\ u_{J-1}^1 \approx 0.98;\ u_J^1 \approx 1.17;$$

$$u_{J+1}^1 = 0.58; u_{J+2}^1 = 0.14;\ u_j^1|_{j>J+2} = 0.$$

尽管 Lax-Wendroff 具有内含的数值黏性,所算出的数值解在间断附近存在波动现象,即出现锯齿型结构,这里称为数值振荡. 在傅里叶变换中知道,用傅里叶级数对间断函数展开时,出现所谓的 Gibbs 效应,即用级数(有限项)算得的值在间断附近具有锯齿型振荡.

对于 Lax-Wendroff 格式,数值振荡存在于激波后面,称为波后振荡. 对于某些格式如欧拉向后差分格式,数值振荡存在于激波前面,称为波前振荡. 对于跳蛙格式,同时存在波前振荡与波后振荡. 读者可以用前面的例子自行验证这一结论.

对于流动问题的计算,数值振荡的最大坏处是,可能在激波前后某处引起密度或者压力为负. 这是物理上不允许的,计算时也会因某种非法运算(除 0,负数开根号)中断.

数值振荡可以通过添加人工黏性或构造滤波算子去掉(Lafon & Osher,1992).

4.3.3　迎风格式

对于双曲型问题,不同特征分量传播的方向不同.前面介绍的中心差分方法忽略这种传播方向的影响.从物理上分析,下面的考虑显得更合理:

为了计算节点 j 和 $j+1$ 之间的单元边界 $j+\frac{1}{2}$ 上的值(如数值通量),应计及各特征分量的方向性.对于向右传播的分量,应该使用左边的值来计算(因为影响来自左边),即应该使用左侧差分.对于向左传播的分量,应该使用右边的值来计算(因为影响来自右边),即应该使用右侧差分.这就是迎风格式的思想.对于以守恒变量为未知数的双曲系统,不同分量相互耦合,因此必须进行特征分裂,以便对不同特征分量采取对应的迎风处理.

4.3.3.1　矩阵分裂

根据双曲性定义,$f(w)$的雅可比矩阵 A 可以对角化.设 $\lambda_{m'}(m'=1,2,\ldots,m)$为 A 的特征值,L 为对角化矩阵,即

$$A=L\Lambda L^{-},\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m).\tag{4.32}$$

将 Λ 分解成正部和负部:

$$\Lambda = \Lambda^{+}+\Lambda^{-}.$$

这里

$$A^{+}=\mathrm{diag}(\lambda_1^{+},\lambda_2^{+},\ldots,\lambda_m^{+}),\lambda_{m'}^{+}=\frac{1}{2}(|\lambda_{m'}|+\lambda_{m'}),$$

$$A^{-}=\mathrm{diag}(\lambda_1^{-},\lambda_2^{-},\ldots,\lambda_m^{-}),\lambda_{m'}^{-}=\frac{1}{2}(\lambda_{m'}-|\lambda_{m'}|).$$

于是(4.32)可以写成

$$A=A^{+}+A^{-}.\tag{4.33}$$

这里 $A^{+}=L\Lambda^{+}L^{-},A^{-}=L\Lambda\ \ L^{-}$.

4.3.3.2　简单一阶迎风格式

考虑运输方程 $u_t+au_x=0$.最简单的半离散迎风格式为

$$\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t}=-\frac{a}{h}(u_j-u_{j-1}),a\geqslant 0;\tag{4.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t}=-\frac{a}{h}(u_{j+1}-u_j),a\leqslant 0.\tag{4.35}$$

最简单的全离散迎风格式为

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{k}=-\frac{a}{h}(u_j^n-u_{j-1}^n),a\geqslant 0;\tag{4.36}$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{k}=-\frac{a}{h}(u_{j+1}^n-u_j^n),a\leqslant 0. \tag{4.37}$$

矢通量分裂　考虑标量形式的方程 $u_t+f(u)_x=0$. 类似于格式(4.36)、(4.37),迎风格式可以写成(令 $f(u)_u=\mathrm{d}f(u)/\mathrm{d}u$)

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{k}=-\frac{1}{h}(f(u_j^n)-f(u_{j-1}^n)),f(u)_u\geqslant 0;$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{k}=-\frac{1}{h}(f(u_{j+1}^n)-f(u_j^n)),f(u)_u\leqslant 0.$$

对于欧拉方程,通量函数满足下述齐次关系式

$$f(w)=A(w)w.$$

应用关系式(4.33),可以将通量分裂成

$$f(w)=A^+w+A^-w=f^++f^-.$$

这里 $f^+=A^+w$ 代表向右传播的扰动,只影响右边的点,$f^-=A^-w$ 代表向左传播的扰动,只影响左边的点. 相应的迎风格式为

$$\frac{w_j^{n+1}-w_j^n}{k}=-\frac{1}{h}(f_j^+-f_{j-1}^++f_{j+1}^--f_j^-). \tag{4.38}$$

尽管上述矢通量分裂的基本原则十分简单,但当某一特征值为 0 时,很难把它当作向右还是向左传播处理. 如果简单把它看作为 0,则计算时会出现其他问题(不稳定、不收敛、给出错误的弱解). 这种特殊情况的处理导致了大量不同矢通量分裂方法的出现. 最著名的有 Steger 和 Warming(1981)矢通量分裂法, van Leer(1982)矢通量分裂法.

矢通量分裂方法是将通量函数按不同特征方向进行分裂,然后求差分.

通量差分裂　与矢通量分裂不同,通量差分裂是针对通量函数的差分进行分裂. 通量差分裂也称脉动分裂. 由雅可比矩阵的定义知道

$$\mathrm{d}f(w)=A(w)\mathrm{d}w. \tag{4.39}$$

在通量差分裂中,将(4.39)写成等同的差分形式

$$f_{j+1}-f_j=A_{j+\frac{1}{2}}^{(R)}(w_{j+1}-w_j). \tag{4.40}$$

这里 $A_{j+\frac{1}{2}}^R=A^{(R)}(w_j,w_{j+1})$称为雅可比矩阵的 Roe 平均(矩阵),定义为

$A_{j+\frac{1}{2}}^{(R)}$的所有特征值为实数并且该矩阵可以对角化;

$$A_{j+\frac{1}{2}}^{(R)}=A(w),w_{j+1}=w_j=w;$$

$$A_{j+\frac{1}{2}}^{(R)}=\frac{f_{j+1}-f_j}{w_{j+1}-w_j},w_{j+1}\neq w_j.$$

引入该矩阵的目的是让原来的非线性偏微分方程对于简单的间断(如激波、接触间断)等价于下面的可以直接求解的线性方程

$$w_t+A^{(R)}w_x=0. \tag{4.41}$$

上面的第一条性质是为了保证问题的双曲性不变. 第二条性质属于一种光滑性要求,即如果空间分布为常数时,线性方程(4.41)完全等价于(4.40). 第三条性质针对的是满足 R-H 条件的间断解. 设非线性问题间断的移动速度为 s. 于是 R-H 条件可以表示为

$$f_j - f_{j+1} = s(w_j - w_{j+1}).$$

将 Roe 矩阵的第三条性质代入上式得

$$A^{(R)}_{j+\frac{1}{2}}(w_{j+1} - w_j) = s(w_j - w_{j+1}).$$

因此,原非线性偏微分方程的精确解确实是 $A^{(R)}_{j+\frac{1}{2}}$ 的特征矢量,s 为 $A^{(R)}_{j+\frac{1}{2}}$ 的特征值,也就是说,原方程的简单间断解与(4.41)的解是等价的.

对于欧拉方程,令 $A = A(u, H, a)$(这里,u 为速度,H 为总焓,a 为音速).定义

$$\overline{u} = \frac{u_j + Du_{j+1}}{1+D},\ \overline{H} = \frac{H_j + DH_{j+1}}{1+D}, D = \sqrt{\frac{\rho_{j+1}}{\rho_j}},$$

和 $\overline{a}^2 = (\gamma - 1)\left(\overline{H} - \frac{1}{2}\overline{u}^2\right)$,则 Roe 矩阵的表达式为

$$A^{(R)} = A(u, \overline{H}, a).$$

将 $A^{(R)}$ 分裂成正部和负部

$$A^{(R)} = A_R^+ + A_R^-,$$

从而有

$$\delta f(w) = A_R^+ \delta w + A_R^- \delta w. \tag{4.42}$$

这里 δ 表示某种差分.式(4.42)右边第一项代表向右传播的扰动,只对右边的点发生影响.右边第二项代表向左传播的扰动,只对左边的点发生影响.以此构造的 Roe 格式为

$$w_j^{n+1} - w_j^n = -\sigma[(A_R^- \delta\omega)^n_{j+\frac{1}{2}} + (A_R^+ \delta\omega)^n_{j-\frac{1}{2}}]. \tag{4.43}$$

这里 $\delta w_{j+\frac{1}{2}} = w_{j+1} - w_j$.考虑到

$$A_R^- = \frac{1}{2}(A_R - |A_R|),\ A_R^+ = \frac{1}{2}(A_R + |A_R|);$$

$$(A_R)_{j+\frac{1}{2}}(w_{j+1} - w_j) = f_{j+1} - f_j,\ (A_R)_{j-\frac{1}{2}}(w_j - w_{j-1}) = f_j - f_{j-1}.$$

因此 Roe 格式也可以写成

$$w_j^{n+1} - w_j^n = -\frac{1}{2}\sigma(f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{1}{2}\sigma[|A_R|_{j+\frac{1}{2}}(w_{j+1} - w_j) - |A_R|_{j-\frac{1}{2}}(w_j - w_{j-1})]. \tag{4.44}$$

如果写成守恒形式,则相应的数值通量为

$$f^*_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) + \frac{1}{2}|A_R|_{j+\frac{1}{2}}(w_j - w_{j+1}).$$

Godunov 法和近似黎曼算子法　设半网格点 $j + \frac{1}{2}$(即点 j 和点 $j+1$ 的中间,也可以称网格单元 j 的右边界或 $j+1$ 的左边界)的左右状态分别为:w_L 和 w_R.如果左右状态不同,则该处定义了一个黎曼问题.假设所考虑的时刻为 $t = 0$.在足够小的时间间距内,其他半网格点的类似黎曼问题还不会影响到这里.因此,可以按黎曼问题

$$w(x, t^n) = \begin{cases} w_L, & x < x_{j+\frac{1}{2}} \\ w_R, & x > x_{j+\frac{1}{2}} \end{cases},$$

求得半网格点的解 $w^{*}_{j+\frac{1}{2}}=w(x=x_{j+\frac{1}{2}},t=0^{+})$来构造数值通量

$$f^{(*)}(w_L,w_R)=f(w^{(*)}_{j+\frac{1}{2}}),$$

便可获得所需要的格式.如果用黎曼问题的精确解,则所得的方法称为 Godunov 方法. 一般认为求黎曼问题的精确解比较费时,所以往往使用近似黎曼解.例如,将方程线性化

$$w_t+\tilde{A}w_x=0.$$

这里 $\tilde{A}$ 为雅可比矩阵$A(w_L)$和 $A(w_R)$的某种平均如 Roe 平均.对于上述黎曼问题,该线性方程的解可以直接求得.以通量函数为例,上述黎曼问题的解为

$$f^{(*)}(w_L,w_R)=f(w_L)+(\tilde{A}^{-}\delta w)_{\frac{1}{2}},$$

$$f^{(*)}(w_L,w_R)=f(w_R)-(\tilde{A}^{+}\delta w)_{\frac{1}{2}}.$$

也可以写成

$$f^{(*)}(w_L,w_R)=\frac{f(w_L)+f(w_R)}{2}-\frac{1}{2}(|\tilde{A}|\delta w)_{\frac{1}{2}}. \tag{4.45}$$

这里$|\tilde{A}|=\tilde{A}^{+}-\tilde{A}^{-}$. 如果使用 Roe 平均,则得到前面所述的 Roe 格式. Osher 采用下面的平均

$$\tilde{A}(w_L,w_R)=\int_{w_L}^{w_R}A(w)\mathrm{d}w.$$

相应格式的数值通量为

$$f^{(*)}(w_L,w_R)=\frac{f(w_L)+f(w_R)}{2}-\frac{1}{2}\int_{w_L}^{w_R}|A(w)|\mathrm{d}w.$$

预分裂法　数值验算表明,矢通量分裂格式比较简单但往往精度低,通量差分裂格式精度较好但计算量较大.为了结合两者的优点,可以将通量函数分解成两部分,然后分别处理.

对于欧拉方程,可以将通量函数预先分裂成对流部分与压力(声学)部分

$$f(w)=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uH\end{pmatrix}=f^{(c)}+f^{(p)},$$

$$f^{(c)}=u\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho H\end{pmatrix},f^{(p)}=\begin{pmatrix}0\\ p\\ 0\end{pmatrix}.$$

对流分量 $f^{(c)}$只有一个特征值(即速度 u).采用矢通量分裂得

$$f^{(c)}=u_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho H\end{pmatrix}_{L/R}.$$

这里

$$(\cdot)_{L/R}=\begin{cases}(\cdot)_L, & 如果\ u_{\frac{1}{2}}\geqslant 0;\\ (\cdot)_R, & 如果\ u_{\frac{1}{2}}<0.\end{cases}$$

因此，对流分量的矢通量分裂十分简单.

压力部分 $f^{(p)}$ 也可以采用矢通量分裂. AUSM(Advection Upstream Splitting Method)格式正是基于这种预分裂而构造的(Liou & Steffen,1991).

还有一种所谓的波-粒(wave/particle split)分裂(Agarwal & Halt,1993)，由下式给出：

$$f(w)=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uH\end{pmatrix}=f^{(c)}+f^{(p)},$$

$$f^{(c)}=u\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho E\end{pmatrix},\quad f^{(p)}=\begin{pmatrix}0\\ p\\ up\end{pmatrix}.$$

与 $f^{(c)}$ 相关的特征值为 (u,u,u)，因此信息以流体质点速度(粒子速度)传播.

与 $f^{(p)}$ 有关的特征值为 $\left(0,\sqrt{\dfrac{\gamma-1}{\gamma}}a,-\sqrt{\dfrac{\gamma-1}{\gamma}}a\right)$，因此信息以压力波形式传播.

还有一种适合低速问题计算的分裂，见(Abarbanel,Duth,& Gottlieb,1989).

4.3.3.3　一阶迎风格式的特性

一阶迎风格式精度低. 下面用一阶迎风格式来求运输方程 $u_t+au_x=0(a>0)$，初始条件仍由(4.31)给定. 将格式写成

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\lambda(u_j^n-u_{j-1}^n),\lambda=\frac{ak}{h}. \tag{4.46}$$

使用 $\lambda=0.5$. 为了方便，将格式写成

$$u_j^{n+1}=(1-\lambda)u_j^n+\lambda u_{j-1}^n=\frac{1}{2}(u_j^n+u_{j-1}^n).$$

当 $n=1$ 时，数值解为

$$u_j^1|_{j<J}=1;\ u_J^1=1;$$
$$u_{J+1}^1=0.5;\ u_j^1|_{j>J+1}=0.$$

当 $n=2$ 时，解为(见图 4.2)

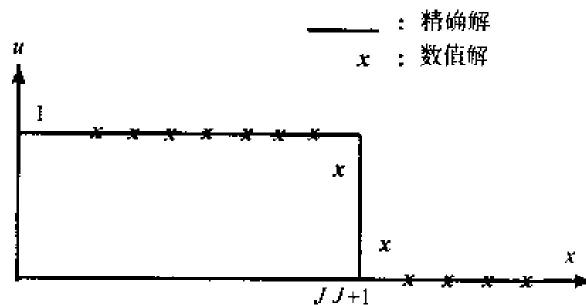


图 4.2　当 $n=2$ 时间断附近的数值解

$$u_j^1|_{j<J}=1;\ u_J^1\approx 1;\ u_{J+1}^1\approx 0.75;$$

$$u_{J+2}^1=0.25;\ u_j^1|_{j>J+2}=0.$$

与中心差分不同，此时没有数值振荡.但间断分辨率差，仅在时间步 $n=2$，间断就分辨在 4 个网格点上.随着时间推移，间断将分辨在更多的点上.因此，迎风格式将本来应该十分陡峭的间断给抹平了.

近来研究表明，一阶迎风格式对于系统方程也可能出现数值振荡.例如，对于欧拉方程，用 Roe 格式计算十分慢的激波便出现数值振荡.

4.3.4　高分辨率格式基本思想

前面介绍了构造中心差分和一阶迎风格式的思路.中心差分虽然简单并且一般具有二阶(或以上)精度，但对于间断解很容易出现不容易控制的数值振荡.前面介绍的迎风格式虽然(对于标量方程)可以抑制数值振荡，但精度低，而且将本来应该很陡峭的激波给抹得很平.为了在解光滑的区域获得较高精度的解，并且在激波等间断区域获得没有数值振荡或数值振荡可以令人接受的较陡峭的分辨率，发展了高分辨率格式.这里简单介绍构造高分辨率格式的基本思想.

4.3.4.1　标量方程的基本特性

这里从标量方程出发介绍构造高分辨率格式的一些基本理论，忽略其中的证明.

考虑标量方程

$$u_t+f(u)_x=0,x\in\mathbf{R},t\in\mathbf{R}^+;\tag{4.47}$$

$$u(x,0)=\phi(x),x\in\mathbf{R}.\tag{4.48}$$

这里 $\phi(x)$ 为具有有界变差的函数，即对于任何 $\delta_x>0$，有

$$\mathrm{TV}(\phi)=\int_{\mathbf{R}}|\phi(x+\delta_x)-\phi(x)|\,\mathrm{d}x<\infty.$$

对于任意时刻，标量问题(4.47)、(4.48)的弱解具有下面的单调特性[①]：

(i)除已经有的极值(空间位置可以在移动)，不会出现新的极值.

(ii)局部极小值不会变小，局部极大值不会变大.

上述单调特性意味着 u 的总变差不会因时间推移而增加，即

$$\mathrm{TV}(u(t_2))\leqslant\mathrm{TV}(u(t_1)),\ \forall\,t_2\geqslant t_1.$$

反过来，正因为上述总变差不随时间增加的性质，才使得弱解不会出现新的极值(即不会在时间推移过程中出现新的振荡解)[②].将这一性质应用于数值方法中，便获得了构造高分辨率格式的基本思想.这是因为，数值振荡指的是新的极值的产生.如果数值方法

---

① 如果在某处 u 为极值即 $u_x=0$，则有 $u_t=-A(u)u_x=0$，因此 u 的值不再变化.

② 这可以严格证明，但可以从直观上进行理解.原来，函数的总变差严格度量了该函数的斜率的绝对值的.新的极值的出现体现了这种度量的增加.所以总变差的减小制约了新的极值的出现.

使得总变差减小，那么数值振荡使得到抑制.

考虑下面的两层 $l+r+1$ 点格式

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-l}^n, \dots, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, \dots, u_{j+r}^n).$$

对于数值解，总变差定义为

$$\mathrm{TV}(u^n) = \sum_j |\delta^+ u_j^n|.$$

这里 $\delta^+ u_j = u_{j+1} - u_j$. 希望上面的格式能体现上面偏微分方程解的单调特性. 这样就可以避免在间断附近出现数值振荡.

定义 4.4　i) 如果函数 H 是所有其自变量的非减函数，则称格式为单调格式；

ii) 如果不等式

$$\mathrm{TV}(u^{n+1}) \leqslant \mathrm{TV}(u^n),\ \forall n \geqslant 0,$$

成立，则格式称为 TVD(total variation diminishing)格式，即总变差减小格式.

iii) 如果 u^n 是 x 的单调函数(即为坐标的增函数或减函数)，必使 u^{n+1} 也为 x 的单调函数，这样的格式称为保单调格式.

可以证明下面的定理(Harten, 1983; Tadmor, 1984, 1988)：

定理 4.1　i) 单调格式为 TVD 格式，反之不一定成立；

ii) TVD 格式是保单调格式，反之不一定成立；

iii) 单调格式只具有一阶精度；

iv) 任何线性保单调格式(从而任何线性 TVD 格式)都是单调格式，因而只具有一阶精度.

因此为了获得高精度 TVD 格式，必须构造非线性格式(即对于线性问题，格式也是非线性的). 为了方便构造或验证 TVD 格式，必须构造 TVD 格式的更简单的等价条件. 这种条件可以针对格式的三种不同形式(增量形式、黏性形式、守恒形式).

A) 考虑格式的增量形式(4.26). 可以证明(Harten, 1983; Tadmor, 1984)下面定理：

定理 4.2　正增量格式为 TVD 格式. 三点 TVD 格式为正增量格式.

B) 对于守恒形式的格式，可以用数值通量来表述 TVD 条件(Tadmor, 1988)：

定理 4.3　对于任意守恒形式的两层格式，设 $f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)}$ Lipschitz 连续. 如果

$$\text{在 } u_j^{n+1} \text{ 取极大值点}\quad f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)} \geqslant f_{j-\frac{1}{2}}^{(*)},$$

$$\text{在 } u_j^{n+1} \text{ 取极小值点}\quad f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)} \leqslant f_{j-\frac{1}{2}}^{(*)},$$

则格式为 TVD 格式.

C) 将格式写成黏性形式

$$\triangle u_j = -\sigma\delta(\mu f)_j + \frac{1}{2}\delta(Q\delta u)_j. \tag{4.49}$$

这里

$$Q_{j+\frac{1}{2}} = \sigma \frac{f_j + f_{j+1} - 2f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)}}{\delta u_{j+\frac{1}{2}}}.$$

定理 4.4 考虑两层显式守恒格式,如果数值黏性系数满足:

$$\sigma|A^{(R)}|_{j+\frac{1}{2}}\leqslant Q_{j+\frac{1}{2}}\leqslant 1. \tag{4.50}$$

则格式为 TVD 格式. 另外三点 TVD 格式必满足上述条件.

下面定理表明不存在三点高精度 TVD 格式.

定理 4.5 三点 TVD 格式只具有一阶精度.

因此,具有二阶精度的 Lax-Wendroff 格式肯定不是 TVD 格式. 所以用此格式会出现数值振荡.

假设 j 为极大值点,即

$$\delta^+ u_j < 0, \delta^- u_j > 0.$$

如果格式为正增量格式,则由(4.26)、(4.27)得 $\Delta u_j\leqslant 0$. 因此局部极大值将变小. 一般情况下,在极值点,TVD 格式退化为一阶精度(Harten & Osher,1987). 因此 TVD 特性有点苛刻. 有时使用条件更宽松一点的格式:

定义 4.5 i)如果条件

$$\mathrm{TV}(u^{n+1})\leqslant \mathrm{TV}(u^n)+O[h^{1+p}], p>0,$$

满足,则格式称为基本无振荡格式(ENO 格式)

ii)如果条件

$$\mathrm{TV}(u^{n+1})\leqslant C,\ \forall n\geqslant 0,$$

满足(C 为正常数),则格式称为总变差有界格式(TVB 格式).

与 TVD 格式相反,ENO 格式和 TVB 格式在极值点可以具有二阶精度. 但允许小的数值振荡出现,只是这种振荡以变差来衡量属于有限的小量,随着网格加密趋于零.

一阶迎风格式(一般为 TVD 格式)内含的数值黏性很大,激波分辨率差,在解均匀的区域精度低. 而中心格式(如 Lax-Wendroff 格式)在解均匀的区域精度高,但在间断附近出现伪振荡.

在激波捕获法的框架下,高分辨率格式的定义为:

- 在解均匀的区域至少具有二阶精度;
- 能将间断分辨在很少的几个网格点上(如 2 至 3 个点),不引起数值振荡(TVD)或者数值振荡幅度很小(ENO,TVB);
- 不需要添加人工黏性或使用滤波算子.

高分辨率格式如果没有数值振荡(Non-oscillatory)、不带自由参数(No-free-parameter)、并且是耗散型格式(Dissipative),那么称为 NND 格式(张涵信,1988).

需要特别注意的是,前面介绍的一切性质和定义都是针对标量方程的. 不能对系统方程谈 TVD,ENO,TVB 等性质. 往往由标量方程建立的结果直接应用于系统方程,而不计较是否保留了应有的特性. 例如,用标量方程构造的 TVD 格式推广到系统方程后可能不再具备 TVD 性质,但仍称为 TVD 格式.

更详细的理论综述可参阅(水鸿寿,1998).

4.3.4.2 构造高分辨率格式的一般方法

构造高分辨率格式有代数方法和几何方法.早期使用代数方法,现在主要使用几何方法.下面分别介绍.

代数方法 代数方法的基本思想是,结合适合处理间断的低精度数值通量 $f^{(L)}$ 和处理均匀解的高精度数值通量 $f^{(H)}$,以获得混合数值通量

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)} = f_{j+\frac{1}{2}}^{(L)} + c_{j+\frac{1}{2}}\left(f_{j+\frac{1}{2}}^{(H)} - f_{j+\frac{1}{2}}^{(L)}\right).$$

这里 $c_{j+\frac{1}{2}}$ 为加权函数,也称通量限制器.构造限制器的原则是,使格式满足 TVD 条件(4.50)并且尽量简单.早期的 FCT(Flux-Corrected Transport)格式属于代数法一类(Boris & Book,1973).

先考虑标量方程并定义

$$a_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \dfrac{\delta^+ f_j}{\delta^+ u_j} & \delta^+ u_j \neq 0, \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right)_j & \delta^+ u_j = 0. \end{cases}$$

最简单的办法是结合一阶迎风格式($f^{(UP)}$)与二阶精度 Lax-Wendroff 格式($f^{(LW)}$)

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)} = f_{j+\frac{1}{2}}^{(UP)} + \phi(r_{j+\frac{1}{2}})\left(f_{j+\frac{1}{2}}^{(LW)} - f_{j+\frac{1}{2}}^{(UP)}\right).$$

这里 $\phi(r)$ 为通量限制函数,$r_{j+\frac{1}{2}}$ 可以定义为

$$r_{j+\frac{1}{2}} = \frac{(|a_{j+\frac{1}{2}-s}| - \sigma a_{j+\frac{1}{2}-s}^2)\delta^+ u_{j-s}}{(|a_{j+\frac{1}{2}}| - \sigma a_{j+\frac{1}{2}}^2)\delta^- u_{j-s}}, \quad s = \mathrm{sgn}(a_{j+\frac{1}{2}}).$$

适当选取限制器函数,便可获得 TVD 格式(Sweby,1984).

某些经典格式可以通过适当选取限制器获得,如:

$\phi(r)=0$,一阶迎风格式;

$\phi(r)=1$,二阶 lax-wendroff 格式;

$\phi(r)=r$,Warming-Beam 格式.

使用下面的限制器可以在标量方程情况下获得 TVD 性质:

- 单调限制器:

$$\phi(r) = \frac{r+|r|}{1+r}.$$

- MUSCL 限制器:

$$\phi(r) = \max\left(0,\min(2,2r),\frac{1+r}{2}\right).$$

- 巨蜂限制器:

$$\phi(r) = \max(0,\min(2r,1),\min(r,2)).$$

- 最小模限制器:

$$\phi(r) = \text{minmod}(1, r).$$

这里 minmod 定义为

$$\text{minmod}(a, b) = \text{sgn}(a)\max(0, \min(|a|, b\,\text{sgn}(a))).$$

如果使用二参数限制器 $\phi(r^+, r^-)$,这里

$$r^+_{j-\frac{1}{2}} = \frac{\delta^+ u_{j+1}}{\delta^+ u_j}, \quad r^-_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\delta^- u_j}{\delta^+ u_j}.$$

则可获得对称 TVD 格式. 二参数限制器与单参数限制器之间由下面关系式连接:

$$\phi(r^+, r^-) = \phi(r^+) + \phi(r^-) - a.$$

对于最小模限制器,$a = 1$. 于其他限制器,$a = 2$.

对于系统方程,必须针对每个特征分量使用上面的方法.

几何构造法　前面讲到的近似黎曼算子在构造数值通量时,用到所在的单元边界的左右状态 $u_{j+\frac{1}{2},L}$ 和 $u_{j+\frac{1}{2},R}$. 在几何构造法中,将这些状态通过插值赋予更一般的定义,而不是简单用左右两个网格点上的值:

• 分段常数法

$$u_{j+\frac{1}{2},L} = u_j,\ u_{j+\frac{1}{2},R} = u_{j+1}.$$

• 线性插值法($\delta u_{j+\frac{1}{2}} = u_{j+1} - u_j$)

$$u_{j+\frac{1}{2},L} = u_j + \frac{1}{2}\delta u_{j-\frac{1}{2}},$$

$$u_{j+\frac{1}{2},R} = u_{j+1} - \frac{1}{2}\delta u_{j+\frac{1}{2}}.$$

• 分段抛物插值(PPM)(Colella & Woodward, 1984)

更一般的二阶线性插值可以写成

$$u_{j+\frac{1}{2},L} = u_j + \frac{1}{4}[(1-\overline{w})\delta u_{j-\frac{1}{2}} + (1+\overline{w})\delta u_{j+\frac{1}{2}}],$$

$$u_{j+\frac{1}{2},R} = u_{j+1} - \frac{1}{4}[(1-\overline{w})\delta u_{j+\frac{3}{2}} + (1+\overline{w})\delta u_{j+\frac{1}{2}}].$$

这里,$\overline{w}$ 为插值系数:

• $\overline{w} = -1$,完全迎风格式;

• $\overline{w} = 0$, Fromme 格式;

• $\overline{w} = 1$,三点中心差分格式;

• $\overline{w} = \frac{1}{3}$,三点迎风偏置格式.

为了获得保单调性质,对斜率 $\delta u_{j+\frac{1}{2}}$ 必须通过斜率限制器进行某种限制. 带限制器的插值公式可以写为

$$u_{j+\frac{1}{2},L} = u_j + \frac{1}{4}[(1-\overline{w})\bar{\bar{\delta}} u_{j-\frac{1}{2}} + (1+\overline{w})\bar{\delta} u_{j+\frac{1}{2}}],$$

$$u_{j+\frac{1}{2},R} = u_{j+1} - \frac{1}{4}[(1-\overline{w})\bar{\delta} u_{j+\frac{3}{2}} + (1+\overline{w})\bar{\bar{\delta}} u_{j+\frac{1}{2}}],$$

$$\bar{\delta} u_{j+\frac{1}{2}} = \Phi(\delta u_{j+\frac{1}{2}}, \omega\delta u_{j-\frac{1}{2}}),$$

$$\bar{\bar{\delta}} u_{j+\frac{1}{2}} = \Phi(\delta u_{j+\frac{1}{2}}, \omega \delta u_{j+\frac{3}{2}}).$$

这里，ω 为满足条件

$$1 \leqslant \omega \leqslant \frac{3-\overline{w}}{1-\overline{w}}$$

的可调参数，$\Phi(d_+, d_-)$ 为限制器. 以下是几种常用的限制器($s = sign(d_+)$)：

1)最小模值限制器

$$\Phi(d_+, d_-) = \text{minmod}(d_+, d_-) = \begin{cases} s\min(|d_+|, |d_-|) & d_+ d_- > 0 \\ 0 & d_+ d_- \leqslant 0 \end{cases};$$

2)van Albada 限制器

$$\Phi(d_+, d_-) = \frac{d_-(d_+^2 + \varepsilon) + d_+(d_-^2 + \varepsilon)}{d_+^2 + d_-^2 + 2\varepsilon}, \ \varepsilon = 10^{-5};$$

3)Woodward-Collela 限制器

$$\Phi(d_+, d_-) = \text{minmod}\left(d_+, d_-, \frac{1}{2}(d_+ + d_-)\right);$$

4)巨蜂(Superbee)限制器

$$\Phi(d_+, d_-) = s\max[0, \min(2|d_+|, sd_-), \min(|d_+|, 2sd_-)].$$

最简单的限制器为

$$S_j^n = \text{minmod}(\delta^+ u_j, \delta^- u_j),$$

从而有

$$u_{j+\frac{1}{2},L} = u_j + \frac{1}{2} S_j^n,$$

$$u_{j+\frac{1}{2},R} = u_{j+1} - \frac{1}{2} S_{j+1}^n.$$

对于系统方程，可以针对守恒变量、基本变量或者特征变量插值. 完成插值后，得 $w_{j+\frac{1}{2},L}$ 和 $w_{j+\frac{1}{2},R}$，便可以按前面介绍的标准方法构造数值通量：

A)如果用近似黎曼算子，数值通量为

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)} = \frac{f(w_{j+\frac{1}{2},L}) + f(w_{j+\frac{1}{2},R})}{2} - \frac{1}{2}|\tilde{A}_{j+\frac{1}{2},L/R}|(w_{j+\frac{1}{2},R} - w_{j+\frac{1}{2},L}).$$

B)如果用矢通量分裂法，则数值通量为

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)} = f^+(w_{j+\frac{1}{2},L}) + f^-(w_{j+\frac{1}{2},R}).$$

以上针对守恒变量、基本变量或者特征变量插值再构造数值通量的方法统称为 MUSCL(Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws)方法. MUSCL 方法最多只能获得二阶精度(Wu, Wang & Sun, 1998). 还有一类方法基于通量函数插值，如部分 ENO 方法(Shu & Osher, 1988)和张涵信的 NND 方法(张涵信, 1988)，可以获得更高的精度.

4.4　边界条件

4.4.1　外边界处理

考虑运输方程

$$u_t + u_x = 0,\ t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.51}$$

和初试条件

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.52}$$

根据特征线理论,在边界 $x=0$ 处需给边界条件

$$u(0,t) = g(t), t \geqslant 0. \tag{4.53}$$

而在边界 $x=1$ 不需要边界条件.

称式(4.53)为解析边界条件,也称为物理边界条件.

在数值方法中,将区域 $0<x<1$ 分成 J 个均匀的网格单元,网格 $j=1,2,\ldots,J$ 处于区域的内部,称为内点.内点上的值由内点格式求.网格点 $j=0$ 和 $j=J+1$ 称为边界点.有两种设置边界点的办法(图 4.3):

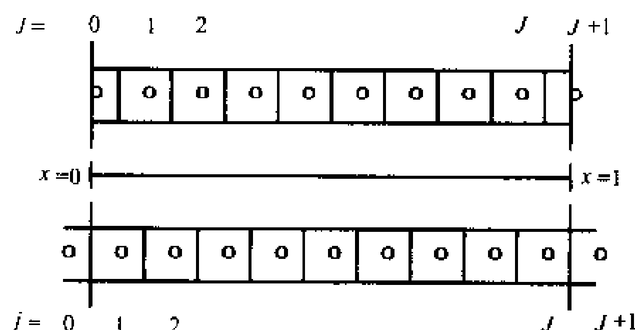


图 4.3　边界点设置
上:实点法;下:虚点法

A. 实点法:边界点($j=0, j=J+1$)与物理边界 $x=0$ 重合.实点法特别适合定义狄利克莱条件.

B. 虚点法:物理边界 $x=0$ 位于边界点($j=0, j=J+1$)和相邻内点($j=1, j=J$)的中间.虚点法特别适合定义牛曼条件.

尽管在右边界不存在解析边界条件,有时也需给一种特殊条件,称为数值边界条件.以实点法为例来讨论.

三点 Lax-Wendroff 格式. 该格式可以写成

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), j=1,2,\ldots,J. \tag{4.54}$$

这里 $\lambda = \frac{1 \times k}{h}$. 在格式(4.54)中,用了 u_0^n 和 u_{J+1}^n 以计算内点 $j=1$ 和 $j=J$ 的值.因 u_0^n

和 u_{J+1}^n 并不由(4.54)计算,所以必须通过边界条件给出.

边界值 u_0^n 由解析边界条件(4.53)给出

$$u_0^n = g(nk).$$

因在 $x=1$ 不存在解析边界条件,所以 u_{J+1}^n 必须通过外插或单侧格式求得

$$u_{J+1}^n = \sum_{\sigma=0}^{s} H_\sigma(\lambda; u_{J+1}^{n-\sigma}, u_J^{n-\sigma}, u_{J-1}^{n-\sigma}, \dots). \tag{4.55}$$

上式便是典型的数值边界条件.

定义 4.6 将精确解 $u=u(1,nkt)$ 代入(4.55)并用泰勒展开.如果有

$$u - \sum_{\sigma=0}^{s} H_\sigma(\lambda; u, u, u, \dots) = O[h^{p+1}],$$

则称(4.55)具有 p 阶精度,也称具有 $(p+1)$ 阶局部精度.

下面是一些数值边界条件的例子:

平插:

$$u_{J+1}^n = u_J^n \ (p=0),$$

$$u_{J+1}^n = 2u_J^n - u_{J-1}^n \ (p=1).$$

斜插:

$$u_{J+1}^n = u_J^{n-1} \ (p=0),$$

$$u_{J+1}^n = 2u_J^{n-1} - u_{J-1}^{n-2} \ (p=1).$$

单侧迎风格式:

$$u_{J+1}^{n+1} = u_{J+1}^n - \lambda(u_{J+1}^n - u_J^n) \ (p=1).$$

盒子格式:

$$u_{J+1}^{n+1} + u_J^{n+1} + \lambda(u_{J+1}^{n+1} - u_J^{n+1}) = u_{J+1}^n + u_J^n - \lambda(u_{J+1}^n - u_J^n) \ (p=2).$$

虚点法中数值边界条件可以用同样办法求得.对于解析边界条件却麻烦些.解析边界条件(4.53)对于实点法可以写成

$$u_{\frac{1}{2}}^n = g(nk). \tag{4.56}$$

这里 $u_{\frac{1}{2}}^n$ 表示边界上的近似.最简单的办法是用下面的插值

$$u_{\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_0^n + u_1^n).$$

由此得边界条件

$$u_0^n = 2g(nk) - u_1^n.$$

该条件只具有二阶精度.如果需要更高阶精度,可以用更高阶插值.

五点 Kreiss-Oliger 格式 五点 Kreiss-Oliger 格式可以写成

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{\lambda}{6}(8u_{j+1}^n - 8u_{j-1}^n - u_{j+2}^n + u_{j-2}^n), j=1,2,\dots,J.$$

显然,该格式需要点 $j=-1,0,J+1,J+2$ 上的边界条件(图 4.4).

首先考虑边界点 $j=0, j=-1$ 的处理,仍只考虑实点法.

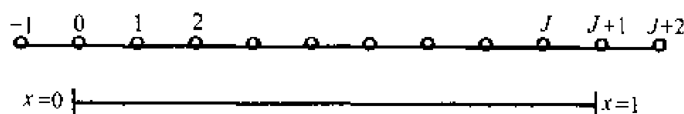


图 4.4　多边界点网格

边界值 u_0^n 仍用解析边界条件

$$u_0^n=g(nk).$$

边界点 $j=-1$ 可以用泰勒展开处理

$$u_{-1}^n=\sum_{\sigma=0}^{q}(-1)^\sigma\frac{h^\sigma}{\sigma!}\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma}u(0,nk)+O(h^{q+1}).$$

上式中的导数 $\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma}u(0,nk)$ 一般用单侧(这里向右)差分代替. 例如,如果只需要一阶精度,便可以只保留上式中的前二项并且用具有一解精度的向右差分代替 $u_x(x=0)$:

$$u_x(x=0)=\frac{u_1-u_0}{h}.$$

由此得

$$u_{-1}=2u_0-u_1.$$

如果需要 q 阶边界条件,则保留 $(q+1)$ 项并用 $q-\sigma+1$ 阶精度的向右差分代替导数 $\frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\sigma}$.

也可以用方程(4.51)来获得

$$u_x=-c^{-1}u_t,u_{xx}=c^{-2}u_{tt},\dots.$$

由 $j=0$ 处的解析边界条件得

$$u_x=-c^{-1}g_t,\ u_{xx}=c^{-2}g_{tt},\dots.$$

从而边界条件可以写成

$$u_{-1}^n=\sum_{\sigma=0}^{q}\frac{h^\sigma}{\sigma!}\frac{g^{(\sigma)}(nk)}{c^\sigma}+O(h^{q+1}).$$

这种方法对于系统方程并不实用.

最后考虑边界点 $j=J+1,J+2$ 的处理.

边界点 $j=J+1$ 的值用数值边界条件(4.55)定义. 边界 $j=J+2$ 的值一般用与 $j=J+1$ 相同的办法求得. 即由点 $J+1$ 的数值边界条件表达式向右平移一个网格点获得

$$u_{J+1}^n=\sum_{\sigma=0}^{s}H_\sigma(\lambda;u_{J+1}^{n-\sigma},u_J^{n-\sigma},u_{J-1}^{n-\sigma},\dots),$$

$$u_{J+2}^n=\sum_{\sigma=0}^{s}H_\sigma(\lambda;u_{J+2}^{n-\sigma},u_{J+1}^{n-\sigma},u_J^{n-\sigma},\dots).$$

例如,如果 $j=J+1$ 处的边界条件为

$$u_{J+1}^n=2u_J^n-u_{J-1}^n,$$

则有

$$u_{j-2}^n = 2u_{j+1}^n - u_j^n.$$

很显然,上述方法可以推广到更多点的格式.

4.4.2 分区内边界条件

考虑下面的数学模型:

$$w_t + f(w)_x = 0, \qquad t \in \mathbf{R}^+, -A < x < B \text{ (双曲系统)}, \tag{4.57}$$

$$w(x,0) = w_0(x), \qquad -A < x < B \text{ (初始条件)}, \tag{4.58}$$

$$w(-A,t) = g(t), \qquad t \in \mathbf{R}^+ \text{ (边界条件)}, \tag{4.59}$$

这里,w 是守恒变量,$f(w)$是通量函数.不失一般性,已假定了 $C = \mathrm{d}f(w)/\mathrm{d}w > 0$.

为了求解上述初边值问题,将区域分解成两个子域:$D_u = (-A, b)$,$D_v = (-a, B)$.这里,$-a \leqslant b$.如果 $-a = b$,则为对接网格(图 4.5);若 $-a < b$,则为覆盖网格(图 4.6).

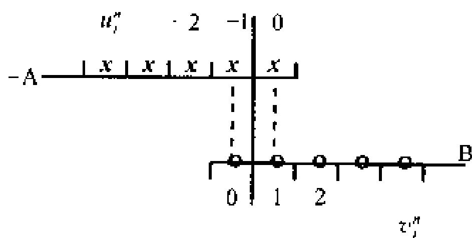


图 4.5 对接网格

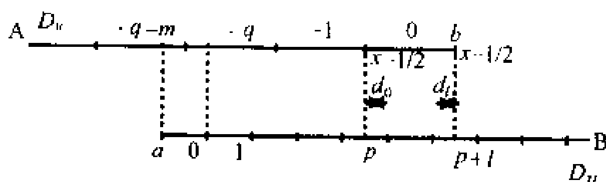


图 4.6 覆盖网格

在区域 D_u 和 D_v 中,网格大小分别记为 h_u 和 h_v.在左右两区域中,差分格式(这里限三点格式)可分别写为

$$\begin{cases} \Delta u_j^n = -\sigma_u (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n), j \in D_u; \\ \Delta v_j^n = -\sigma_v (g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n), j \in D_v. \end{cases} \tag{4.60}$$

这里 $\sigma_u = k/h_u$,$\sigma_v = k/h_v$,k 为时间步长,f 与 g 为左右子区中相应于函数 $f(w)$ 的数值通量.

子域内边界处 $j=0$ 值 u_0^{n+1} 和 v_0^{n+1} 由下面的耦合条件定义.

4.4.2.1 对接网格

对接网格又分为错点对接(图 4.7,4.9)和正点对接(图 4.8,4.10)两种.正点为数值解定义的点.根据加密与否,又分为连续交接(图 4.7,4.8)和非连续交接(图 4.9,4.10)两种.

连续错点对接的耦合条件由下面简单的连续性条件给出

$$u_0^n = v_1^n, \quad v_0^n = u_{-1}^n. \tag{4.61}$$

不连续错点对接的耦合条件可以通过内插得到.例如,通过要求算术平均值和一阶差分在交界面连续,可以得到如下耦合条件

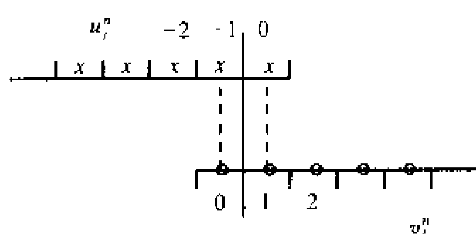


图 4.7 连续错点对接

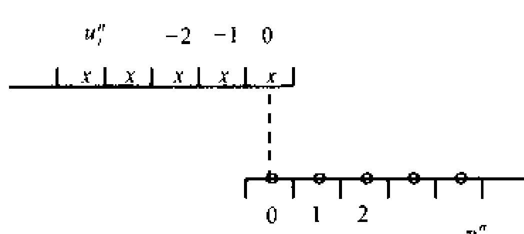


图 4.8 连续正点对接

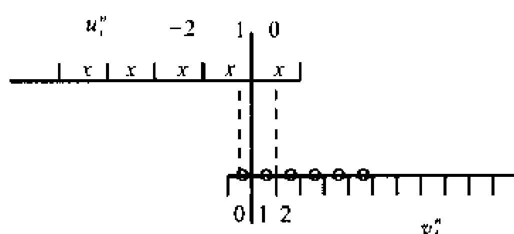


图 4.9 不连续错点对接

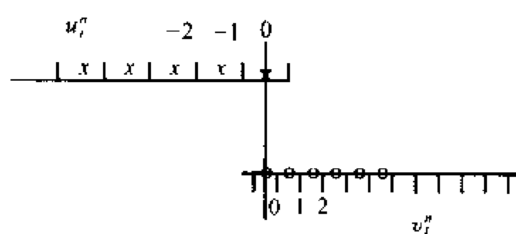


图 4.10 不连续正点对接

$$\frac{1}{2}(u_0^n + u_{-1}^n) = \frac{1}{2}(v_0^n + v_1^n), \quad \frac{1}{h_u}(u_0^n - u_{-1}^n) = \frac{1}{h_v}(v_1^n - v_0^n). \tag{4.62}$$

正点对接的耦合条件可以由线性插值给出:

$$u_0^n = \frac{1}{2}(v_1^n + u_{-1}^n), \quad v_0^n = \frac{1}{2}(u_{-1}^n + v_1^n)\ (\text{连续对接}), \tag{4.63}$$

$$\begin{cases} u_0^n = c_u u_{-1}^n + (1 - c_u) v_1^n \\ v_0^n = c_v v_1^n + (1 - c_v) u_{-1}^n \end{cases} (\text{不连续对接}). \tag{4.64}$$

这里 $c_u = h_v/(h_u + h_v)$, $c_v = h_u/(h_u + h_v)$. 另外,可以将正点对接通过覆盖另外一个网格(虚网格)转化成两个错点对接(Lerat & Wu,1996),也可以在内边界点处直接用与内点相似的差分格式给交接条件(Berger 1987). 上面几种耦合条件在文献(Lerat & Wu, 1996)中做了详细的分析.

4.4.2.2 覆盖网格

对于覆盖网格,必须引入某种插值来用相邻子域的值来定义耦合条件. 最常用的有一般插值、通量插值和再构造插值.

一般插值 用一般插值定义的耦合条件最简单,因而在工程应用中最常用到. 文献(Chesshire & Henshaw,1990)深入分析了线性插值与高阶插值对分区算法整体精度的影响.

对于图 4.11 所示的分区网格,用线性插值所得的耦合条件为

$$u_0^n = (1 - \alpha) v_p^n + \alpha v_{p+1}^n, \quad v_0^n = (1 - \beta) u_{-q}^n + \beta u_{-q-1}^n. \tag{4.65}$$

这里, $\alpha = d/h_u$, $\beta = e/h_v$, d 和 e 为错位距离. 也可以采用高阶插值. 一般插值条件能很容易地推广到高维问题.

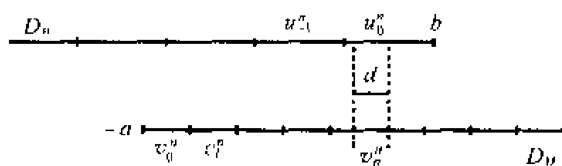


图 4.11 覆盖网格：一般插值

通量插值 文献(Berger,1987)研究了确保守恒的耦合条件.该方法将耦合条件直接定义在数值通量上.差分格式一直求到 $j=0$,未知的数值通量 $f_{1/2},g_{-1/2}$由插值给出.若用线性插值,则耦合条件可写成

$$\begin{cases} f_{1/2}=\alpha g_{p+l-1/2}+(1-\alpha)g_{p+l+1/2}, \\ g_{-1/2}=\beta f_{-q-m-1/2}+(1-\beta)f_{-q-m+1/2}. \end{cases} \tag{4.66}$$

这里,$\alpha=1-d_l/h_u$, $\beta=1-e_l/h_v$,d_l 和 e_l 为错位距离,见图 4.12.原则上也可以用高阶插值定义这类耦合条件,但对于这类特殊的耦合条件,增加插值的阶数却不一定能增加精度.

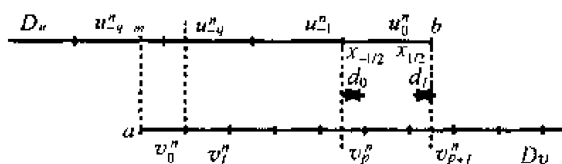


图 4.12 覆盖网格：通量插值和再构造插值

通量插值虽能保证守恒,但用到高维问题时特别复杂.文献(Part & Sjogreen,1994)提出了特征通量插值法.另外,文献(Wu,1996)就多点格式给出了一种混合线性插值——通量插值耦合条件.

再构造插值 再构造插值耦合条件在文献(Part & Sjogreen,1994)中提出.再构造插值的具体步骤如下:

- 从子域 D_v 和 D_v 的数值解通过插值得到 $u(x,nk)$和 $v(x,nk)$的再构造函数 $L(x,u(x,nk))$和 $L(x,v(x,nk))$.
- 精确计算或逼近积分

$$u_0^n=\frac{1}{h_u}\int_{b-\frac{1}{2}h_u}^{b+\frac{1}{2}h_u}L(x,v^n)\mathrm{d}x,\quad v_0^n=\frac{1}{h_v}\int_{-a-\frac{1}{2}h_v}^{-a+\frac{1}{2}h_v}L(x,u^n)\mathrm{d}x.$$

例如,如果采用分段常数进行再构造,即 $L(x,u)=u_j, x\in(x_{j-1/2}^u,x_{j+1/2}^u)$, $L(x,v)=v_j$, $x\in(x_{j-1/2}^v,x_{j+1/2}^v)$和中点积分,就得到

$$u_0^n=\frac{1}{h_u}\sum_{i=0}^{l}d_i v_{p+i}^n,\quad v_0^n=\frac{1}{h_v}\sum_{i=0}^{m}e_i u_{-q-i}^n. \tag{4.67}$$

这里 $d_i, i=1,2,\dots,l$ 为子域D_u 上网格$j=0$(即 $x_{j-1/2}^u<x<x_{j+1/2}^u$)与子域 D_v 上网格 $j=p,p+1,\dots,p+l$ 的交.同样可定义 $e_i,i=1,2,\dots,m$.

4.4.2.3　隐式差分格式的耦合条件

在应用隐式格式时，几乎毫无例外的把它写成如下的 Δ 形式：

$$L_u \Delta u_j^n = \Delta u_j^{\exp},\ L_v \Delta v_j^n = \Delta v_j^{\exp}. \tag{4.68}$$

其中，$\Delta u_j^n = u_j^{n+1} - u_j^n$，$\Delta v_j^n = v_j^{n+1} - v_j^n$，$L_u$ 和 L_v 为隐式部分定义的算子，$\Delta u_j^{\exp}$ 和 $\Delta v_j^{\exp}$ 为格式的显式部分.

以连续错点对接为例来说明怎样将上述各类耦合条件推广到隐式差分格式. 隐式格式的特点是，时间步 $n+1$ 的任何一点的值与其他网格点的值通过差分算子耦合起来. 因此，必须给出 $n+1$ 时刻的耦合条件. 但如果将耦合条件写成

$$u_0^{n+1} = v_1^{n+1},\ v_0^{n+1} = u_{-1}^{n+1}, \tag{4.69}$$

则各区的隐式差分算子需联立求解，这就失去了分区法的优点. 为了使各子区算子能独立求解，需对耦合条件进行特殊处理.

定常问题耦合条件　对于定常问题，时间精度不重要，所以可用时间滞后条件，即用已知的时间步为 n 的值来定义时间步为 $n+1$ 的值，即令

$$\begin{cases} u_0^n = u_0^{n-1}, & v_0^n = v_0^{n-1} \quad (\text{显式部分}); \\ \Delta u_0^n = \Delta v_1^{n-1}, & \Delta v_0^n = \Delta u_{-1}^{n-1} \ (\text{隐式部分}). \end{cases} \tag{4.70}$$

由文献(Lerat & Wu,1996)提出的耦合条件(4.70)十分简单且能使各子域的隐式差分格式独立求解. 该条件对显式和隐式两部分都引入了时间滞后因而可称为完全滞后条件.

与完全滞后条件相对应，工程应用中往往用下面的部分滞后条件

$$\begin{cases} u_0^n = v_1^n,\ v_0^n = u_{-1}^n (\text{显式部分}); \\ \Delta u_0^n = 0,\ \Delta v_0^n = 0\ (\text{隐式部分}). \end{cases} \tag{4.71}$$

或

$$\begin{cases} u_0^n = v_1^n,\ v_0^n = u_{-1}^n (\text{显式部分}); \\ \Delta u_0^n = \Delta v_1^{n-1},\ \Delta v_0^n = \Delta u_{-1}^{n-1} (\text{隐式部分}). \end{cases} \tag{4.72}$$

条件(4.70)，(4.71)和(4.72)虽然在形式上只有细微差别，但它们的特性差别很大. 条件(4.70)几乎对所有的格式都能保证稳定(Lerat & Wu, 1996)，而且稳定性与 CFL 数的大小无关. 而条件(4.71)和(4.72)的稳定性与内点格式有关，通常在大 CFL 数时引起不稳定. 另外，条件(4.72)具有二阶时间精度，而另外两个条件的精度只有一阶.

非定常问题耦合条件　对于非定常问题，既要求各区的格式能独立求解，又能保证具有足够的时间精度. 这里给出三种方法：完全迭代法，覆盖-投影法和算子并行法.

完全迭代法(Rai,1986). 该方法的思想是，在每个时间步 n，对差分格式用滞后耦合条件迭代若干次. 下面给出最简单的迭代算子：

a)对 $l=0$，令 $\Delta u_0^{l,n}=0$，$\Delta v_0^{l,n}=0$；

b)对 $l=l+1$，用耦合条件 $\Delta u_0^{l,n} = \Delta v_1^{l-1,n}$，$\Delta v_0^{l,n} = \Delta u_{-1}^{l-1,n}$ 求解方程 $L_u \Delta u_j^{l,n} = \Delta u_j^{\exp}$，$L_v \Delta v_j^{l,n} = \Delta v_j^{\exp}$；

c)根据收敛程度，回到上一步或退出迭代并令 $\Delta u_j^n = \Delta u_j^{L,n}$，$\Delta v_j^n = \Delta v_j^{L,n}$.

如果 L_u 和 L_v 属于椭圆型算子，则上面的迭代是收敛的. 完全迭代法的缺点是，迭代过程太耗时间.

覆盖-投影法(Wu & Zou, 2000). 对于任一格式，数值波在每一时间步传播的距离不超过 CFL 个网格点. 基于这一实事，在内边界引入含有 $L_o=2$CFL 个网格点的虚拟覆盖，用滞后耦合条件，在虚拟覆盖部分因滞后条件引入的不精确解通过投影网格另一侧的精确解来代替. 以图 4.13 的网格为例，加上虚拟覆盖后成图 4.14，定义 $p=L_o/2$. 图 4.13 对应 $p=3$ 和 $L_o=6$. 耦合条件分下面几步定义：

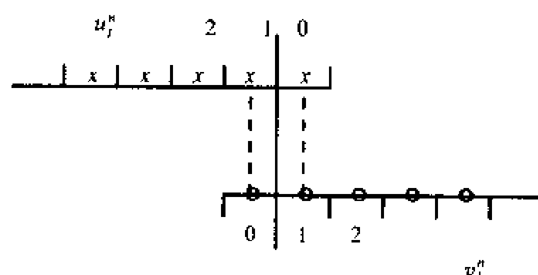


图 4.13　原分区网格

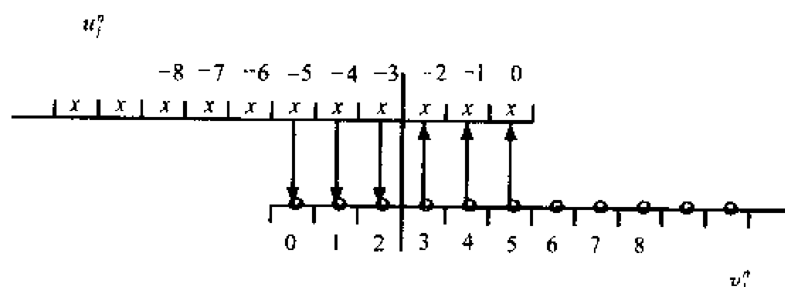


图 4.14　覆盖-投影虚拟网格

a)时间滞后条件 $\Delta u_0^{n+1}=0, \Delta v_0^{n+1}=0$;

b)求解各区的差分格式;

c)覆盖区解的投影($p=L_o/2$): $u_{-l+1}^{n+1}=v_{L_o-l}^{n+1}, v_{l-1}^{n+1}=u_{-L_o+l}^{n+1}, l=1,2,\ldots,p$.

覆盖-投影法非常简单而且时间精度高，但 CFL 值很大时在覆盖部分损失的计算时间占的高比重会影响方法的效率.

算子并行法(Parallel Tridiagonal Solver, Wang 1981). 假定格式隐式部分为三对角算子，通过构造属于交接面的子系统来获得精确的耦合条件. 该方法可概括如下：

a)将网边格式(4.68)加精确的耦合条件(4.69)整理成如下的矩阵形式: $M\Delta U=\Delta U^{(\exp)}-C_u\Delta v_1, M\Delta V=\Delta V^{(\exp)}-C_v\Delta u_{-1}$;

b)令 $C_u=C_v=0$，用传统的 Thomas 方法求解 $M\Delta\overline{U}=\Delta U^{(\exp)}, M\Delta\overline{V}=\Delta V^{(\exp)}$;

c)令 $\Delta U=\Delta\overline{U}+B_u\Delta v_1, \Delta V=\Delta\overline{V}+B_v\Delta u_{-1}$. 代入矩阵形式的方程便可确定 $B_u=-M^{-1}C_u$ 和 $B_v=-M^{-1}C_v$，从而得精确解.

4.5 时间积分

对于方程

$$w_t + f(w)_x = 0, \tag{4.73}$$

全离散格式的一般形式可以写成

$$\sum_{\tau=-1}^{s} H_\tau(w_{j-l}^{n-\tau}, \ldots, w_{j-1}^{n-\tau}, w_j^{n-\tau}, w_{j+1}^{n-\tau}, \ldots, w_{j+r}^{n-\tau}, \sigma) = 0. \tag{4.74}$$

有三种时间离散方法:时空独立处理法(method of lines)、泰勒展开法、混合方法.

4.5.1 时空独立处理法

4.5.1.1 基本思想

首先对空间导数进行离散,由此得只含时间导数的常微分方程系统.

考虑方程(4.73). 将点 $x = x_j$ 处的空间导数 $f_x(w)$ 用差分 $-d(w)_j$ 代替,得

$$\frac{\mathrm{d}w_j}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}(w)_j. \tag{4.75}$$

例如,对 f_x 使用中心差分得

$$\frac{\mathrm{d}w_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h}.$$

常微分方程系统(4.75)也可以称为方程(4.73)的半离散形式. 为了方便,记

$$U = (\ldots, w_{j-1}, w_j, w_{j+1}, \ldots)^t, D = (\ldots, d_{j-1}, d_j, d_{j+1}, \ldots)^t.$$

从而可将(4.75)写成

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = D(U). \tag{4.76}$$

空间算子 $D(U)$一般是自变量 U 的非线性函数.

对于某些方法,如有限体积法中的格点法(第六章),半离散形式为

$$M\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = D(U). \tag{4.77}$$

这里 M 为矩阵. 如果 D 用 $M^{-1}D$ 代替,则仍可写成(4.76)的形式.

接着将半离散系统(4.76)进行时间积分,可以采用任意求解常微分系统的标准数值方法求解. 最常用的是线性多步法和龙格库-塔法.

4.5.1.2 线性多步法

一般的 K 步($(K+1)$层方法)方法可以写成

$$\frac{1}{k}\sum_{\sigma=0}^{K}\alpha_\sigma U^{n+\sigma} = \sum_{\sigma=0}^{K}\beta_\sigma D^{n+\sigma}. \tag{4.78}$$

这里 $D^{n+\sigma} = D(U^{n+\sigma},(n+\sigma)k)$.

对(4.78)用泰勒级数展开,并以$\frac{\mathrm{d}^q U}{\mathrm{d}t^q}$代替$\frac{\mathrm{d}^{q-1}D}{\mathrm{d}t^{q-1}}(q>1)$,得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}\sum_{\sigma=0}^{K}\alpha_\sigma U\\ &+\sum_{\sigma=0}^{K}\alpha_\sigma\sigma\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}-\sum_{\sigma=0}^{K}\beta_\sigma D\\ &+k\sum_{\sigma=0}^{K}\left(\alpha_\sigma\frac{1}{2!}\sigma^2-\sigma\beta_\sigma\right)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}\\ &+k^2\sum_{\sigma=0}^{K}\left(\alpha_\sigma\frac{1}{3!}\sigma^3-\frac{1}{2!}\sigma^2\beta_\sigma\right)\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}t^2}\\ &\vdots\\ &+k^{q-1}\sum_{\sigma=0}^{K}\left(\alpha_\sigma\frac{1}{q!}\sigma^q-\frac{1}{(q-1)!}\sigma^{q-1}\beta_\sigma\right)\frac{\mathrm{d}^{q-1}D}{\mathrm{d}t^{q-1}}\\ &+O[k^q]\\ =\,&0.\end{aligned}$$

如果 U 为常数,则必有 $D\equiv 0$. 从而

$$\sum_{\sigma=0}^{K}\alpha_\sigma = 0. \tag{4.79}$$

由(4.76)得

$$\sum_{\sigma=0}^{K}\sigma\alpha_\sigma = \sum_{\sigma=0}^{K}\beta_\sigma = 1. \tag{4.80}$$

为了获得 q 阶精度,必须进一步令

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma=0}^{K}\left(\alpha_\sigma\frac{1}{2!}\sigma^2-\sigma\beta_\sigma\right)=0,\\ &\sum_{\sigma=0}^{K}\left(\alpha_\sigma\frac{1}{3!}\sigma^3-\frac{1}{2!}\sigma^2\beta_\sigma\right)=0,\\ &\vdots\\ &\sum_{\sigma=0}^{K}\left(\alpha_\sigma\frac{1}{q!}\sigma^q-\frac{1}{(q-1)!}\sigma^{q-1}\beta_\sigma\right)=0.\end{aligned}$$

这些加上(4.79)、(4.80)共组成了 $q+2$ 个关系式. 而参数有 $2(K+1)$个. 所以下面推论成立:

推论 4.3 令 $q=2K$,则存在唯一组参数,使得 K 步方法具有 q 阶精度.

最一般的 2 步方法可以写成

$$(1+\xi)U^{n+2}-(1+2\xi)U^{n+1}+\xi U^n = k[\theta D^{n+2}+(1-\theta-\phi)D^{n+1}-\phi D^n] \tag{4.81}$$

可以证明如下结论:

推论 4.4 考虑 2 步格式(4.80). A)如果 $\phi=\xi-\theta+\frac{1}{2}$,则格式具有二阶精度;B)如

并将 U^{n+1} 展开成

$$U^{n+1} = U + kU_t + \frac{k^2}{2}U_{tt} + \ldots,$$

得

$$U_t + \frac{k}{2}U_{tt} + O[k^2] = (\beta_1 + \beta_2)D + k\beta_2\alpha_2 D_t + O[k^2].$$

因 $U_{tt} = D_t$，所以如果

$$\beta_1 + \beta_2 = 1,$$

$$\beta_2\alpha_2 = \frac{1}{2},$$

便得到2阶精度的格式. 上面关系式包含三个未知数 $\alpha_2, \beta_1, \beta_2$，因此存在无穷多个具有二阶精度的两步龙格-库塔方法. 进一步讨论表明，这无穷个方法中，不存在精度高于二阶的方法.

著名的 Henn 方法可以写成

$$U^{(2)} = U^n + kD^{(1)},$$

$$U^{(n+1)} = U^n + \frac{1}{2}k(D^{(1)} + D^{(2)}).$$

下面的格式称为预估-校正法

$$U^{(2)} = U^n + \frac{k}{2}D^{(1)},$$

$$U^{(n+1)} = U^n + kD^{(2)}.$$

下面是具有4阶精度的五步龙格-库塔法

$$U^{(1)} = U^n,$$

$$U^{(2)} = U^n + \frac{1}{2}kD^{(1)},$$

$$U^{(3)} = U^n + \frac{1}{2}kD^{(2)},$$

$$U^{(4)} = U^n + kD^{(3)},$$

$$U^{(n+1)} = U^n + \frac{k}{6}(D^n + 2D^{(2)} + 2D^{(3)} + D^{(4)}).$$

也可以用其他方式构造龙格-库塔法. 下面的方法具有3阶精度.

$$U^{(1)} = U^n,$$

$$U^{(2)} = U^{(1)} - kD^{(1)},$$

$$U^{(3)} = \frac{3}{4}U^{(1)} + \frac{1}{4}U^{(2)} - \frac{1}{4}kD^{(2)},$$

$$U^{(n+1)} = \frac{1}{3}U^{(1)} + \frac{2}{3}U^{(3)} - \frac{2}{3}kD^{(3)}.$$

4.5.1.4　隐式方法的求解

考虑由(4.83)定义的格式并写成

$$U^{n+1} - U^n - \frac{k}{2} D^{n+1} = \frac{k}{2} D^n.$$

因 D^{n+1}属于 U^{n+1}的非线性函数，所以隐式算子 $L(w^{n+1}) = U^{n+1} - \frac{k}{2} D^{n+1}(U^{n+1})$ 一般只能通过牛顿迭代等方法求逆.

为了获得更容易求逆的方法，将隐式算子线性化得

$$D^{n+1} = D^n + B(U^{n+1} - U^n) + O[(U^{n+1} - U^n)^2].$$

这里 $B = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}U}$可以预先求得.

保留前两项，便得到著名的 Beam-Warming 格式

$$\left(1 - \frac{k}{2} \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}U}\right)(U^{n+1} - U^n) = kD^n.$$

线性隐式系统的求逆可以采用任意标准方法.

与显式格式相比，隐式格式每一时间步计算量大，但可以使用较大的 CFL 数，加快收敛到定常解的速度.

4.5.2 泰勒展开法

4.5.2.1 基本思想

首先用泰勒展开将前后两个时间步的数值解联系起来，其中的时间导数通过原偏微分方程与空间导数联系起来，最后用中心差分取代其中的空间导数. 这就是泰勒展开法的基本思想.

还是考虑方程(4.73). 用泰勒展开得

$$w(t+k) - w(t) = kw_t + \frac{k^2}{2!} w_{tt} + \dots . \tag{4.84}$$

使用(4.73)，便获得如下时间导数与空间导数的关系式

$$\begin{aligned} &w_t = -f_x, \\ &w_{tt} = -f_{xt} = -(f_t)_x = -(Aw_t)_x = (Af_x)_x = (A^2 w_x)_x, \\ &\vdots \end{aligned}$$

这里 $A = \frac{\mathrm{d}f(w)}{\mathrm{d}w}$.

在著名的 Lax-Wendroff 方法中，在方程(4.73)的右端保留前两项

$$w(t+k) - w(t) = -kf_x + \frac{k^2}{2!}(A^2 w_x)_x. \tag{4.85}$$

也可以写成

$$w(t+k) - w(t) = -kf_x + \frac{k^2}{2!}(Af_x)_x. \tag{4.86}$$

如果在式(4.85)、(4.86)中使用二阶中心差分，便得到如下的 Lax-Wendroff 格式

$$w_j^{n+1} - w_j^n = -\frac{k}{2h}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2}[A_{j+\frac{1}{2}}^2(w_{j+1}^n - w_j^n) - A_{j-\frac{1}{2}}^2(w_j^n - w_{j-1}^n)].$$

也可以写成

$$w_j^{n+1} - w_j^n = -\frac{k}{2h}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2}[A_{j+\frac{1}{2}}(f_{j+1}^n - f_j^n) - A_{j-\frac{1}{2}}(f_j^n - f_{j-1}^n)].$$

对于线性常系数方程 $u_t + au_x = 0$，Lax-Wendroff 格式可以唯一地写成

$$u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{ka}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{k^2a^2}{2h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

对于一般的非线性方程,有许多替代形式.

4.5.2.2 S_β^α 格式

由 Lerat 和 Peyret 提出的 S_β^α 格式具有如下特性:A)具有两个时间层;B)空间有三个点;C)具有二阶精度;D)与 Lax-Wendroff 格式线性等价.该格式可以写成:

$$\tilde{w}_{j+\beta}^{n+\alpha} = (1-\beta)w_j + \beta w_{j+1} - \alpha\sigma(f_{j+1} - f_j),$$

$$\Delta w_j = -\frac{\sigma}{2\alpha}[(\alpha-\beta)f_{j+1} + (2\beta-1)f_j + (1-\alpha-\beta)f_{j-1} + \tilde{f}_{j+\beta}^{n+\alpha} - \tilde{f}_{j+\beta-1}^{n+\alpha}].$$

这里 $\sigma = k/h$.

如果 $\alpha = 1, \beta = 0$,便得到著名的 MacCormack 格式.

令 $f = aw$,则上述格式退化为 Lax-Wendroff 格式. S_β^α 的主要优点是,它不需要计算雅可比矩阵.

4.5.3 混合方法

该方法将全离散格式写成包含一定数量空间点和时间层的一般形式.所涉及的待定参数通过要求格式满足一定的特性(精度、稳定性)获得.该方法由 Lerat(1989,1990)提出.

4.5.3.1 基本思路

为了介绍基本思路,只考虑如下的三点两层格式

$$H_{-1}(w_{j-1}^{n+1}, w_j^{n+1}, w_{j+1}^{n+1}) = H_{+1}(w_{j-1}^n, w_j^n, w_{j+1}^n). \tag{4.87}$$

首先定义算子 μ 和 δ:

$$\delta(\phi\delta\psi)_j = (\phi\delta\psi)_{j+\frac{1}{2}} - (\phi\delta\psi)_{j-\frac{1}{2}} = \phi_{j+\frac{1}{2}}(\psi_{j+1} - \psi_j) - \phi_{j-\frac{1}{2}}(\psi_j - \psi_{j-1}),$$

$$\delta(\mu\psi)_j = \frac{1}{2}(\psi_{j+1} - \psi_{j-1}).$$

通过代数运算,Lerat(1990)证明了如下结果:

定理 4.6 任意三点两层显式或线性隐式守恒格式可以写成如下简单形式

$$\Delta w_j + \frac{\sigma}{2}\delta[M\mu(\Delta w)]_j - \frac{1}{4}\delta[P\delta(\Delta w)]_j = -\sigma\delta(\mu f)_j + \frac{1}{2}\delta(Q\delta w)_j. \tag{4.88}$$

这里 $\sigma=k/h$，而且

$$M_{j+\frac{1}{2}}=M(w_j,w_{j+1};\sigma),$$

$$P_{j+\frac{1}{2}}=P(w_j,w_{j+1};\sigma),$$

$$Q_{j+\frac{1}{2}}=Q(w_j,w_{j+1};\sigma),$$

证明. 这里只考虑显式格式. 三点显式格式的守恒形式的定义为

$$\Delta w_j=-\sigma(h_{j+\frac{1}{2}}-h_{j-\frac{1}{2}}).$$

这里数值通量函数的定义式为

$$h_{j+\frac{1}{2}}=h(w_j,w_{j+1};\sigma).$$

由微分中值定理，在一定的光滑性假设下，可以选取两个矩阵 $\overline{A}(w_j,w_{j+1})$，$B(w_j,w_{j+1};\sigma)$使得

$$f(w_{j+1})=f(w_j)+\overline{A}(w_j,w_{j+1})(w_{j+1}-w_j),$$
$$h(w_j,w_{j+1};\sigma)=h(w_j,w_j;\sigma)+B(w_j,w_{j+1};\sigma)(w_{j+1}-w_j),$$

由相容性假设有

$$h(w_j,w_j;\sigma)=f(w_j).$$

于是有

$$\begin{aligned}
&h(w_j,w_{j+1};\sigma)\\
&=h(w_j,w_j;\sigma)+B(w_j,w_{j+1};\sigma)(w_{j+1}-w_j)\\
&=f(w_j)+B(w_j,w_{j+1};\sigma)(w_{j+1}-w_j)\\
&=\frac{1}{2}(f(w_j)+f(w_{j+1}))+B(w_j,w_{j+1};\sigma)(w_{j+1}-w_j)-\frac{1}{2}(f(w_{j+1})\\
&\quad-f(w_j))\\
&=\frac{1}{2}(f(w_j)+f(w_{j+1}))+\left[B(w_j,w_{j+1};\sigma)-\frac{1}{2}\overline{A}(w_j,w_{j+1};\sigma)\right](w_{j+1}\\
&\quad-w_j)\\
&=\frac{1}{2}(f(w_j)+f(w_{j+1}))-\frac{1}{2}Q(w_j,w_{j+1};\sigma)(w_{j+1}-w_j).
\end{aligned}$$

这里

$$Q(w_j,w_{j+1};\sigma)=-2B(w_j,w_{j+1};\sigma)+\overline{A}(w_j,w_{j+1};\sigma).\square$$

定理 4.7　在满足一定的光滑性条件下，格式(4.88)具有二阶精度的充要条件是

$$Q(u,u;\sigma)=\sigma^2[A^2(u)-M(u,u;\sigma)A(u)].$$

如果不满足上述条件，则只具有一阶精度.

证明　可以通过泰勒展开直接获得. □

4.5.3.2　显式格式

如果取 $M=P\equiv 0$，则得到下面的三点两层守恒格式的一般形式

$$\Delta w_j=-\sigma\delta(\mu f)_j+\frac{1}{2}\delta(Q\delta w)_j. \tag{4.89}$$

下面的格式均属于这一类：

纯中心差分格式　令 $Q_{j+\frac{1}{2}}=0$，得下面的不稳定格式

$$\Delta w_j = -\sigma\delta(\mu f)_j.$$

Lax 类型格式　取 $Q_{j+\frac{1}{2}}=I$，便得 Lax 格式

$$\Delta w_j = -\sigma\delta(\mu f)_j + \frac{1}{2}\delta(\delta w)_j.$$

该格式也可以写成

$$w_j^{n+1} - w_j^n = \frac{1}{2}(w_{j-1} + w_{j+1}) - \sigma\delta(\mu f)_j.$$

将矩阵 Q 用标量 θ 代替，则得下面的 Lax 一般类型格式

$$\Delta w_j = -\sigma\delta(\mu f)_j + \frac{1}{2}\delta(\theta\delta w)_j.$$

例如，Rusanov 格式可以写成 $\theta_{j+\frac{1}{2}}=\sigma\rho[A(\mu w)]_{j+\frac{1}{2}}$.

Roe 格式　取 $Q_{j+\frac{1}{2}}=\sigma|A^{(R)}|_{j+\frac{1}{2}}$，便得 Roe 格式.

Lax-Wendroff 格式　前面提到，如果

$$Q(u,u;\sigma) = \sigma^2A^2(u),$$

则有二阶精度. 令 $Q_{j+\frac{1}{2}}=\sigma^2\mu A_{j+\frac{1}{2}}^2$，便得到原始的 Lax-Wendroff 格式. 如果令 $Q_{j+\frac{1}{2}}=\sigma^2(\mu A_{j+\frac{1}{2}})A_{j+\frac{1}{2}}^{(R)}$，并使用 Roe 矩阵的定义，便得如下的 Lax-Wendroff 格式

$$\Delta w_j = -\sigma\delta(\mu f)_j + \frac{\sigma^2}{2}\delta((\mu A)\delta f)_j.$$

The S_β^α 格式　为了获得二阶精度，取

$$Q_{j+\frac{1}{2}} = \sigma^2\tilde{A}_{j+\frac{1}{2}}^{(R)}A_{j+\frac{1}{2}}^{(R)}.$$

这里

$$\tilde{A}_{j+\frac{1}{2}}^{(R)} = A^{(R)}(w_{j+\beta}, \tilde{w}_{j+\beta}^{n+\alpha}),$$

$$w_{j+\beta} = (1-\beta)w_j + \beta w_{j+1},$$

$$w_{j+\beta}^{n+\alpha} = w_{j+\beta} - \alpha(\sigma\delta f)_{j+\frac{1}{2}}.$$

为了方便，可以利用 Roe 矩阵的定义，得

$$(Q\delta w)_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\sigma}{\alpha}(f_{j+\beta} - \tilde{f}_{j+\beta}^{n+\alpha}).$$

这样就得到了前面介绍的 S_β^α 格式.

4.5.3.3　隐式格式

如果 $M\neq0, P\neq0$，则格式属于隐式格式. 下面的格式均属于这一类：

Beaming-Warming 格式　令 $M_{j+\frac{1}{2}}=2\theta(\mu A)_{j+\frac{1}{2}}, P_{j+\frac{1}{2}}=-\theta\sigma(\mu A)_{j+\frac{1}{2}}, Q_{j+\frac{1}{2}}=0$，并且使用

$$\mu(A\Delta w)_{j+\frac{1}{2}} = [(\mu A)(\mu\Delta w) + \frac{1}{4}(\delta A)\delta(\Delta w)]_{j+\frac{1}{2}},$$

使得如下的 Beaming-Warming 格式

$$\Delta w_j + \theta\sigma\delta[\mu(A\Delta w)]_j = -\sigma\delta(\mu f)_j.$$

如果取 $\theta = \frac{1}{2}$,则上述格式便具有二阶精度.

Lerat 隐式格式 如果

$$f(w_{j+l-1}, w_{j+l-2}, \dots, w_{j-r}; \sigma) = -f(w_{j-l+1}, w_{j-l+2}, \dots, w_{j+r}; \sigma),$$

则称格式与 x 方向无关.

下面的 Lerat 隐式格式与 x 方向无关而且具有二阶精度:

$$\Delta w_j + \alpha\sigma\delta[\mu(A\Delta w)]_j + \beta\frac{\sigma^2}{2}\delta[(\mu A)^2\delta(\Delta w)]_j + \frac{\gamma}{2}\delta^2(\Delta w)_j$$
$$= -\sigma\delta(\mu f)_j + (1-2\alpha)\frac{\sigma^2}{2}\delta[(\mu A)\delta f]_j.$$

如果取 $\alpha = \gamma = 0$,便得下面的块隐式格式

$$\Delta w_j + \beta\frac{\sigma^2}{2}\delta[(\mu A)^2\delta(\Delta w)]_j = -\sigma\delta(\mu f)_j + \frac{\sigma^2}{2}\delta[(\mu A)\delta f]_j.$$

进一步将 A 用其谱半径 $\rho(A)$ 代替,便得下面的标量隐式格式

$$\Delta w_j + \beta\frac{\sigma^2}{2}\delta[(\mu\rho(A))^2\delta(\Delta w)]_j = -\sigma\delta(\mu f)_j + \frac{\sigma^2}{2}\delta[(\mu A)\delta f]_j.$$

4.5.4 源项处理

4.5.4.1 源项的来源

在一维情况下,带源项的方程可以写成

$$w_t + f(w)_x = S(w, x, t). \tag{4.90}$$

这里 $S(w,x,t)$ 为源项,或为 x,t 的函数,或为 w 的函数,很少同时为 x,t,w 的函数. 这里考虑的源项不含导数. 在以下几种情况,所求的方程右端含有源项.

1)在非惯性坐标系中(如网格作刚体移动时,而坐标系固定在网格上),N-S 方程右端需添加反映惯性力影响的源项;

2)考虑重力影响时,需在动量方程中添加重力项;

3)考虑两相流时,在 N-S 方程右端需条件反映各种流体相互干扰的源项(包括质量交换、动量交换、能量交换);

4)考虑两方程湍流模型时,湍流模型方程右端含有反映湍流生成与消灭的源项;

5)考虑化学反应时,需在组分浓度方程和能量方程添加由化学反应引起的质量变化与能量变化;

6)将高维问题化为低维问题时,也会出现源项(如变截面管道流动的准一维欧拉方程,见第三章).

读者也许还可以举出一些其他例子.这里不去从物理角度探讨源项的来源,只考虑不同特性的源项的处理.

4.5.4.2　源项处理的基本原则

如果源项是解的函数,则有如下关系式

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S = B\mathrm{d}w = L_B \Lambda_B L_B^{-1}\mathrm{d}w &= (L_B \Lambda_B^{+} L_B^{-1} + L_B \Lambda_B^{-} L_B^{-1})\mathrm{d}w \\ &= B^{+}\mathrm{d}w + B^{-}\mathrm{d}w. \end{aligned} \tag{4.91}$$

这里,$B = \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}w}$为方阵,一般可以对角化(读者是否可以举出反例?).显然,B^{+}代表了源项的生成部分(正部),B^{-}代表了源项的消灭部分(负部).源项数值处理的最大困难是,它所隐含的时间尺度

$$t_S \sim \max\left(\frac{1}{|\lambda_B|}\right).$$

往往比流动的宏观时间尺度 t_F 小许多量级:

$$t_S \ll t_F.$$

这就是所谓的由源项引起的刚性问题.为了在合理的时间计算宏观尺度的流动,需要取较大的时间步长;而为了严格反映源项的影响,计算中需要取很小的时间步长.为了解决双方的矛盾,往往牺牲源项影响的时间精度,而采用隐式化处理.因源项一般不包括空间微分,只需逐点进行隐式处理,所以也称为点隐式处理.

源项隐式处理的最主要要求是,既要在非刚性条件下保证一定的时间精度,又要避免在刚性情况下因时间步长较大而引起未知数出现无限大或出现不该有的负值.这就要求源项的正部与负部分开处理.

源项的正负部分裂与通量函数的特征分裂完全类似.通量函数按特征值分裂后,正特征值部分一般采用左侧差分,负特征值部分一般采用右侧差分,这样可以避免数值振荡.注意到通量函数项处于方程的左边,源项处于右边.因此,源项的正部应该采用欧拉向前差分(即显式处理),源项的负部应该采用欧拉向后差分(即隐式处理),这样才能避免正物理量出现负值.

4.5.4.3　带源项的格式

为了简练,假设不带源项的格式具有下面的形式

$$(I + kD)\Delta w_j = \Delta w_j^{\exp}. \tag{4.92}$$

这里 D 为某差分算子.

对于一般源项,对正部进行显式处理,采用 Cranck-Nicolson 方法对负部进行隐式处理,格式为:

$$\left(I + kD - \frac{k}{2}B^{-}\right)\Delta w_j = \Delta w_j^{\exp} + kS. \tag{4.93}$$

考察下面的不带空间导数项的例子

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=S,S=\frac{1}{w+\varepsilon},\varepsilon>0;$$

$$w(0)=0.$$

显然有 $B<0$,按理应采用隐式处理.上述方程的解为

$$w=\sqrt{2t+\varepsilon^2}-\varepsilon.$$

可见,对所有的 $\varepsilon>0$,解随时间增加而缓慢增加.

如果采用显式格式

$$w^{n+1}=w^n+\frac{k}{w^n+\varepsilon}.$$

当 $\varepsilon\to0$,有 $w^1=\frac{k}{\varepsilon}\to\infty$,即算一步解就趋于无限大.

如果采用隐式格式(4.93),则

$$w^1=\frac{1}{1+\frac{k}{2}\frac{1}{(w^0+\varepsilon)^2}}+w^0=\frac{\varepsilon k}{\varepsilon^2+\frac{k}{2}}.$$

当 $\varepsilon\to0$,有 $w^1\to0$,因此隐式格式可以给出合理的结果.

隐式格式(4.93)可以进行下面的近似因子分解

$$(I+kD)\left(I-\frac{k}{2}B^-\right)\Delta w_j=\Delta w_j^{\exp}+kS. \tag{4.94}$$

对于高维问题,上述近似因子分裂还可以与各种空间分裂组合.

附录　简单数值试验问题

考虑下面的完全气体欧拉方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2+p)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uH)=0.$$

这里 ρ 为密度,p 为静压,u 为速度,$E=\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}u^2$ 为总能,$H=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}u^2$ 为总焓,$\gamma=1.4$ 为比热比.

验证格式有一些经典算例,下面介绍部分这种算例.

B1　Sod 问题

Sod G. A., "A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear conservation laws", J. Comput. Phys., **27** (1978), pp. 1-31.

它属于一种黎曼问题,初始条件为

$$\begin{pmatrix}\rho_l\\u_l\\p_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\rho_r\\u_r\\p_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.125\\0\\0.1\end{pmatrix}.$$

它的解包含一个向左移动的稀疏波、一个接触间断和一个向右移动的激波.

B2 Lax 问题

Lax P. D., "Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations", Comm. Pure. Appl. Math., **7**(1954), pp. 159-193.

它也是一个黎曼问题,初始条件为

$$\begin{pmatrix}\rho_l\\u_l\\p_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.445\\0.698\\3.52773\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\rho_r\\u_r\\p_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\0\\0.571\end{pmatrix}$$

的解包含一个向左移动的稀疏波、一个接触间断(速度为 1.582)和一个向右移动的激波(速度为 $s'=2.48$). 接触间断的左右状态分别为

$$\begin{pmatrix}\rho_l^{(c)}\\u_l^{(c)}\\p_l^{(c)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.345\\1.528\\2.465\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\rho_r^{(c)}\\u_r^{(c)}\\p_r^{(c)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.304\\1.528\\2.465\end{pmatrix}.$$

B3 移动激波问题

Lax P. D. and Wendroff B., "System of conservation laws", Comm Pure. Appl. Math., **8**(1960), pp. 217-237.

激波的移动速度为 $s'=2$. 激波前后的状态分别为

$$\begin{pmatrix}\rho_l\\u_l\\p_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1.57\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\rho_r\\u_r\\p_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\0\\0.57\end{pmatrix}.$$

B4 暴风波问题

Woodward P. R. and Collela P., J. Comput. Phys., **54**(1984), 115.

令 $0<x<1$,初始条件为

$$\begin{aligned}&\rho=1\quad \forall\,0<x<1,\\&u=0\quad \forall\,0<x<1,\\&p=\begin{cases}1000, & 0<x<0.1,\\0.01, & 0.1<x<0.9,\\100, & 0.9<x<1.\end{cases}\end{aligned}$$

在左右边界上都给反射条件(固体边界条件). 当 $t=0.028$ 时,出现两激波相撞.

B5 激波-湍流相互作用问题

Shu C.-W. and Osher S., J. Comput. Phys., **83**(1989), 32.

该问题的初始条件为:

$$\begin{pmatrix}\rho_l\\u_l\\p_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.857143\\2.629369\\10.333333\end{pmatrix},x<-4;$$

$$\begin{pmatrix}\rho_r\\u_r\\p_r\end{pmatrix}=(1+0.2\sin(5x),0,1),x\geqslant-4.$$

B6　扩散管道问题

扩散管道的横截面积为：

$$S=1.398+0.347\tanh(0.8x-4),0<x<10.$$

入口条件为

$$\rho=0.502,\ u=1.299,\ p=0.381.$$

相应的入口马赫数为 $M_i=1.26$，出口压力为 $p_e=0.746$．流动含有一激波，位置为 $x=4.816$．

参　考　文　献

[1] R. K. Agarwal and D. W. Halt, *A novel algorithm for the solution of compressible Euler equations in WPS form*, AIAA CFD Conf., Orlando, FL, July, 1993.

[2] S. Abarbanel, P. Duth, and D. Gottlieb, *Splitting methods for low Mach number Euler and Navier-Stokes equations*, Computers and Fluids, **17**(1989), pp. 1 – 20.

[3] M. Berger, *On conservation at grid interfaces*, SIAM J. Numer. Anal., **24**(1987), pp. 967 – 983.

[4] J. P. Boris and D. L. Book, *Flux-corrected transport*, 1. *SHASTA*, *a fluid transport algorithm that works*, J. Comput. Phys., **11**(1973), pp. 38 – 69.

[5] G. Chesshire and D. Henshaw, *Composite overlapping meshes for the solution of partial differential equations*, J Comput. Phys., **90**(1990), pp. 1 – 64.

[6] G. Chesshire and D. Henshaw, *A scheme for conservative interpolation on overlapping grids*, SIAM J. Sci. Comput., **15**(1994), pp. 819 – 845.

[7] P. Colella and P. R. Woodward, *The piecewise parabolic method (PPM) for gas dynamical simulations*, J. Comput. Phys., **54**(1984), pp. 174 – 201.

[8] D. X. Fu and Y. W. Ma, *High resolution schemes*, CFD Review, 1(1995).

[9] A. Harten, *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys., **49**(1983), pp. 357 – 393.

[10] A. Harten and S. Osher, *Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes I*, SIAM J. Numer. Anal., **24** (1987), pp. 279 – 309.

[11] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Volumes 1 – 2, John Wiley & Sons, Chichester (1990)

[12] F. Lafon and S. Osher, *Essentially nonoscillatory postprocessing filtering methods*, ICASE Report NO. 92 – 5, 1992

[13] P. Lax and B. Wendroff, *System of conservation laws*, 1960(XIII), pp. 217 – 237.

[14] A. Lerat, *Difference methods for hyperbolic problems with emphasis on space-centered approximations*, Lectures Series 1990 – 03, Computational Fluid Dynamics, Von Karman Institute for Fluid Dynamics

[15] A. Lerat, *Difference schemes for nonlinear hyperbolic systems – A general framework*, Lecture Notes in Math.,

1402(1989),pp.12－29.

[16] A. Lerat, *Multidimensional centered schemes of the Lax-Wendroff type*, CFD Review, **1**(1995).

[17] A. Lerat, and R. Peyret, *Sur le choix de schémas aux différences du second ordre fournissant des profils de chocsans oscillation*, C.R.Acad. Sci. Paris, 227 A (1973),pp.363－366 See also Hirsh(1990).

[18] A. Lerat and Z.N.Wu, *Stable conservative multidomain treatments for implicit Euler solvers*, J. Comput. Phys., **123**(1996),pp.45－64.

[19] M.S. Liou and C.J. Steffen, *A new flux splitting scheme*, J. Comput. Phys , **107**(1991),pp. 23－39

[20] R.H.Ni, *A multi-grid scheme for solving the Euler equations*, AIAA J., **20**(1982),pp.1565－1571.

[21] E.Part-Enander and B. Sjögreen, *Conservative and non-conservative interpolation between overlapping grids for finite volume solutions of hyperbolic problems*, Computers and Fluids, **23**(1994),pp.551－574.

[22] R.Peyret and T.D.Taylor, *Computational Methods for Fluid Flow*, New York: Springer-Verlag(1982).

[23] M.M. Rai, *A implicit, conservative, zonal-boundary scheme for Euler equation calculations*, Computers and Fluids, **14**(1986),pp.295－319.

[24] P.L. Roe, *Approximate Riemann Solvers: Parameter vector and difference schemes*, J.Comput. Phys.,**43**(1981), pp.357－372.

[25] C.W.Shu and S. Osher, *Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes*, J. Comput. Phys., **83**(1988),pp.439－471.

[26] J.L.Steger and R. Warming, *Flux-vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods*, J. Comput. Phys.,**40**(1981),pp. 263－293.

[27] P.K. Sweby, *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws*, SIAM J. Numer, Anal.,**21**(1984),pp.995－1011.

[28] E. Tadmor, *The large-time behaviour of the scalar, genuinely nonlinear Lax-Friedrichs scheme*, Math. Comp.,**43** (1984a),pp.353－368.

[29] E. Tadmor, *Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes*, Math. Comp.,**43** (1984b),pp.369－381.

[30] E. Tadmor, *Convenient total variation diminishing conditions for nonlinear difference schemes*, SIAM J. Numer. Anal., **25**(1988),pp.1002－1014.

[31] B. van Leer, *Flux-vector splitting for the Euler equations*, Lecture Notes in Phys., **170**(1982),pp.507－512.

[32] B. van Leer, *Progress in multidimensional upwind differencing*, ICASE Report 92－43.

[33] H Wang, *A parallel method for tridiagonal equations*, ACM Trans on Math. Software, 7(1981), pp 170－183.

[34] H.M. Wu, L.E. Wang, and G.Sun, *Non-existence of third order MUSCL schemes, unified constructionn of ENO schemes, and a new discontinuous sharpenning technique-stiff source term approach*, CFD Review, **1**(1998),pp. 300－317.

[35] Z.N Wu and H.Zou, *Grid overlapping for implicit parallel computations of compressible flows*, J. Comput. Phys., **157**(2000),pp.2－43.

[36] 水鸿寿,一维流体力学差分方法,国防工业出版社,1998.

[37] 张涵信,无波动,无自由参数的耗散差分(NND)格式,空气动力学学报,**6**(2),1988.

第五章　计算方法的分析理论

第四章中讲述了构造数值方法的基本原则.但如果只套用这些原则,那么所构造的格式不一定能使用.为了使格式能使用,必需验证它是否具备一些基本特性,如相容性、稳定性、收敛性、守恒性等.这些都是计算方法的分析理论所需要解决的问题.因此必需掌握计算方法的分析理论.

5.1　计算方法的基本特性:相容性、稳定性与收敛性

5.1.1　基本概念

考虑下面的偏微分方程,也称精确方程

$$w_t + f(w)_x = 0, x \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}^+. \tag{5.1}$$

这里,通量函数 $f(w)$ 可以是未知数 w(精确解)的线性或非线性函数.方程(5.1)的初始条件可以写为

$$w(x,0) = w_0(x), x \in \mathbf{R}. \tag{5.2}$$

令 w_j^n 为在坐标 $x_j = x_0 + jh$ 和时刻 $t^n = nk$ 的数值解.这里 h 和 k 分别表示网格尺寸和时间步长.通常令 $\sigma = k/h$ 为常数.一般的 $s+2$ 层 $l+r+1$ 点格式可以写成

$$L((w_{j+\nu}^{n-\tau})_{-1 \leqslant \tau \leqslant s, -l \leqslant \nu \leqslant r; k, h}) = 0, \tag{5.3}$$

或

$$\sum_{\tau=-1}^{s} H_\tau = 0. \tag{5.4}$$

这里 $H_\tau = H_\tau(w_{j-l}^{n-\tau}, \ldots, w_{j-1}^{n-\tau}, w_j^{n-\tau}, w_{j+1}^{n-\tau}, \ldots, w_{j+r}^{n-\tau}; k, h)$ 通常是其自变量的非线性函数,$s(s \geqslant -1)$ 为整数,l,r 一般为非负整数.格式(5.3)也可以称为离散方程.离散方程的解 w_j^n 称为数值解.数值解又分为精确数值解与计算数值解.精确数值解指的是严格满足离散方程的解.计算数值解指的是计算机给的解.因字长的限制,计算机存在所谓的机器误差,因机器误差使得计算数值解与精确数值解之间存在一定差别.

为了使数值解具有一定的意义,必需使下面几条原则得到满足:

相容性.离散方程(5.3)必需是以精确方程(5.1)出发的,即离散方程必需与精确方程相容.

稳定性.数值方法必需稳定,从而使离散方程的计算数值解尽量接近精确数值解.如果方法不稳定,计算数值解将无界.

收敛性.当时间步长 k 与空间步长 h 趋于零时,离散方程的解应该收敛到原偏微分方程的精确解.

显然,相容性与稳定性是数值解能收敛到精确解的必要条件.

5.1.2 相 容 性

相容性的正式定义为:

定义 5.1 对任意具有有界微分的光滑解 w,如果存在与解无关但可以是时间步长与空间步长函数的因子 c,使下面条件满足

$$\lim_{k\to 0,h\to 0} cL((w_{j+\nu}^{n-\tau})_{-1\leqslant\tau\leqslant s,-l\leqslant\nu\leqslant r};k,h)=(w_t+f(w)_x)(x_j,t^n).$$

那么,称离散方程(5.1)与精确方程(5.1)是相容的.

下面以运输方程 $w_t+w_x=0$ 为例来考察几个格式的相容性.

第一个例子是纯中心差分格式

$$w_j^{n+1}=w_j^n-\frac{\sigma}{2}(w_{j+1}^n-w_{j-1}^n).$$

对于具有有限微分的解,有

$$w_j^{n+1}=w_j^n+O[k],w_{j-1}^n=w_j^n+O[h],w_{j+1}^n=w_j^n+O[h].$$

因而有

$$\begin{aligned}L((w_{j+\nu}^{n-\tau})_{-1\leqslant\tau\leqslant s,-l\leqslant\nu\leqslant r};k,h)&=\frac{w_j^{n+1}-w_j^n}{k}+\frac{1}{2h}(w_{j+1}^n-w_{j-1}^n)\\&=(w_t+w_x)_j^n+O[k]+O[h]\\&=(w_t+w_x)_j^n,k,h\to 0.\end{aligned}$$

因此,该格式是与运输方程相容的.

第二个例子是一阶迎风格式

$$w_j^{n+1}=w_j^n-\sigma(w_j^n-w_{j-1}^n).$$

用上述同样的办法可以证明它是与运输方程相容的.

5.1.3 稳 定 性

定义稳定性有许多方法.不同定义导致了不同稳定性理论.最简单的办法是要求计算数值解 $\bar{w}_j^n$ 与精确数值解 w_j^n 之间的差别在 $n\to\infty$ 时一致有界.这种定义因没有考虑有限时间步 n 误差的特性,所以现在很少用于稳定性分析.

最流行的办法是令数值解在任意时间步 $n>0$ 都有界.将解矢量记为

$$W^n=(\ldots,w_{j-1}^n,w_j^n,w_{j+1}^n,\ldots)^t,$$

并将(两层隐式)格式写成下面算子形式

$$BW^{n+1}=EW^n.$$

这里 $B=B(k,h)$ 和 $E=E(k,h)$ 都是矩阵算子.

假设格式的隐式部分可以求逆,从而可以将格式写成

$$W^{n+1}=CW^n, C=B^{-1}E. \tag{5.5}$$

从初始时刻到任意时刻 $t=t^n$,逐次求解格式使得

$$W^1=CW^0,$$
$$W^2=CW^1=CCW^0=(C)^2W^0,$$
$$\vdots$$
$$W^n=(C)^nW^0.$$

这里$(C)^n$ 表示算子C 的n 次方.

定义 5.2 如果算子集$(C)^n$一致有界,即存在常数 K,使得

$$\|(C)^n\|<K \quad \forall 0\leqslant nk\leqslant T, \forall n\geqslant 1,$$

则称格式(5.5)是稳定的(从而解 W^n 有界).这里$\|\cdot\|$表示某种范数①,如 l_2 范数.如果对 l_2 范数稳定,则称 l_2 稳定.

5.1.4 收 敛 性

令 ε_j^n 为数值解 w_j^n 与精确解 $w(x_j,t^n)$之间的差别,即

$$\varepsilon_j^n=w_j^n-w(x_j,t^n).$$

定义 5.3 如果有:$\lim_{k,h\to 0}|\varepsilon_j^n|=0, \forall j, \forall n$,则称格式的数值解能收敛到方程的精确解.

定理 5.1 (**Richtmyer and Morton,1967**) 记 $W(t^n)$为精确解矢量,如果有

$$\lim_{k\to 0, n\to\infty}\|[C(k)]^nW^0-W(t^n)\|=0,$$

则数值解能收敛到精确解.

对于定常问题,解与 n 无关,从而定义 5.3 应该改为:

定义 5.4 如果 $\lim_{h\to 0}|\varepsilon_j|=0, \forall j$,则称数值解能收敛到精确解.

人们经常使用时间相关格式计算定常问题.在这种情况下,定常解也可能与时间步有关,从而还是可以用定义 5.3 来定义收敛性.例如,考虑精确方程 $w_t+w_x=s$(s 为源项)的 Lax-Wendroff 格式

$$w_j^{n+1}-w_j^n=-\frac{1}{2}\frac{k}{h}(w_{j+1}^n-w_{j-1}^n)+\frac{1}{2}\frac{k^2}{h^2}(w_{j+1}^n-2w_j^n+w_{j-1}^n)+ks.$$

在定常状态 $w_j^n=w_j$,格式简化为

$$w_{j+1}-w_{j-1}-\frac{k}{h}(w_{j+1}-2w_j+w_{j-1})=2hs.$$

因此,格式仍与时间步长有关(如果适当选取边界条件,可以做到数值解与时间步长无关).

---

① ϕ_j 的 l_2 范数定义为 $\|\phi\|_2=\sum_j h_j|\phi_j|^2$.

5.1.5　等价性定理

相容性、稳定性与收敛性是相互关联的，这由下面的著名等价性定理可以看出：

定理 5.2　(Lax) 等价性定理　对于适定的线性柯西问题，如果格式与精确方程相容，那么稳定性是收敛性（即在时间步长与网格尺寸趋于 0 时格式的数值解收敛到偏微分方程的精确解）的充分必要条件．

Lax 等价性定理原先是针对线性问题的线性格式建立的．对于非线性问题，偏微分方程的弱解可以不唯一．在某种稳定性条件下，当 $k\to 0$ 和 $h\to 0$，数值解收敛到某一解．该收敛解可以是原偏微分方程的弱解，也可能不是．为了收敛到弱解，格式必需具有守恒形式．如果要收敛到具有物理意义的弱解，格式还必需满足某种熵条件．这些问题还会部分讨论．

5.2　稳定性理论

如果只考虑初始条件而不考虑边界条件（即假定边界在无限远处或者边界条件为周期性的），相应的问题称为柯西问题．如果同时考虑边界条件，则称为混合初边值问题．在柯西问题稳定的前提下，边界条件还可能引起不稳定．因此柯西问题的稳定性理论与混合初边值问题的稳定性理论需分别介绍．

前面只是谈了稳定性的基本定义．但在稳定性分析时，很难直接使用定义来分析．通过傅里叶分析，已经导出了一些很容易验证的简单条件．

5.2.1　柯西问题的稳定性理论

5.2.1.1　离散空间的波

考虑一维区间 $-L<x<L$．

三角波　我们寻找能用三角波表示的周期解．在连续空间，三角波可以表示为

$$w(x)=\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

这里 λ 为波长，波长的允许取值范围为

$$0\leqslant\lambda\leqslant 2L.$$

如果区域是无限的，那么波长可以在区间 $(0,\infty)$ 取任意值．与波长相关联的是波数

$$\xi=\frac{2\pi}{\lambda}.$$

在离散空间，三角波可以表示为

$$w_j=\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(j+c)h\right].$$

这里 c 为任意常数. 最大波长为 $\lambda_{max}=2L$. 可是,最小可以分辨的波长为 $2h$ 而非象连续空间那样等于 0. 更准确地说,所允许的波长只能取下面的离散值

$$\lambda=2h,4h,\ldots,2Nh,\ N=\frac{L}{h}.$$

当 $c=\frac{1}{2}$ 和 $\lambda=2h$,解变成

$$w_j=\sin\left[\pi\left(j+\frac{1}{2}\right)\right]=(-1)^{j+1}.$$

它属于锯齿型结构,是数值振荡的原因所在.

傅里叶分解 在连续空间,解 $w(x)$ 可以通过下面的傅里叶变换分解为谐波 $e^{\iota\xi x}$ ($\iota=\sqrt{-1}$):

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{\iota\xi x}\hat{w}(\xi)d\xi.$$

在离散空间,因只允许有离散波长,所以只能通过傅里叶级数来进行谐波分解:

$$w_j=\sum_{\nu=-N}^{\nu=N}\bar{w}_\nu e^{\iota j\pi\frac{\nu}{N}}=\sum_{\nu=-N}^{\nu=N}\bar{w}_\nu \mathrm{e}^{\iota j\xi_\nu}.$$

这里 $\bar{w}_\nu$ 为第 ν 个谐波的振幅, $\xi_\nu=\frac{\nu\pi}{N}$ 为在区间 $(-\pi,\pi)$ 取值的相位角. 靠近 $\xi_\nu=0$ 的相位角为低频区域即长波区域; 靠近 $\xi_\nu=\pi$ 的区域为高频区域即短波区域. 最短波长为 $2h$.

5.2.1.2 von Neumann 稳定性理论

作为二战时期美国军事机密的 von Neumann 稳定性理论基于常系数方程. 在常系数假设下,差分格式可以写成:

$$\sum_{\tau-1}^{-s}Q_\tau w_j^{n+\tau}=0,\ \forall j. \tag{5.6}$$

这里 $Q_\tau=\sum_{\nu=-l}^{r}A_{\tau,\nu}E^\nu$, $Ew_j=w_{j+1}$.

定义 5.5 (求解条件) 如果对每一个 g,方程

$$Q_1w_j^{n+1}=g_j.$$

存在唯一的有界的解,则称格式(5.6)可以求解.

显然,显式格式是可以求解的.

对每个算子 Q_τ,定义

$$\widetilde{Q}_\tau(\xi)=\sum_{\nu=-l}^{r}A_{\tau,\nu}e^{\iota\nu\xi}.$$

将 $w_{j+\nu}^n=z^ne^{\iota\nu\xi}Y$ 代入格式(5.6),便得到下面的特征值问题:

$$M(z,\xi)Y=0,M=\sum_{\tau=1}^{-s}z^\tau\widetilde{Q}_\tau(\xi). \tag{5.7}$$

对每一个 $\xi\in\mathbf{R}$,代数方程

$$\det M(z,\xi)=0$$

的根 z 称为特征值.

在一般情况下有 $(s+1)m$ 个特征值 $z_\tau, \tau=1,2,\ldots,(s+1)m$,这里 m 为系统方程中标量方程的个数.在某些情况下,可能出现多重根特征值,即有多个相同的特征值.

定义 5.6 von Neumann 条件 如果格式(5.7)的所有特征值都满足 $|z|\leqslant 1, \forall \xi \in \mathbf{R}$,则称格式满足 von Neumann 条件。

定义 5.7 (简单根) 令 $z=z_0(\xi)$ 属于 q 重根特征值并且满足 $|z_0|=1$,如果正好存在 q 个线性无关的特征向量,那么 z_0 称为简单根.
很显然,单重根($q=1$)属于简单根.

定义 5.8 (稳定性) 如果 von Neumann 条件满足并且所有满足 $|z|=1$ 的特征值都属于简单根,那么格式是柯西稳定的.

其实,定义 5.2 才是真正的稳定性定义,而定义 5.8 本应该表述为定理.粗略地说,该定理应该表述为:von Neumann 条件是柯西问题 l_2 稳定的必要条件,在符合进一步假设条件下该条件变为稳定性的充分条件.这里为了图方便直接使用定义 5.8.如果读者对这一在二战中秘密发展的理论的原貌感兴趣,可以参阅文献(Richtmyer and Morton, 1967).以后将对 2 层格式证明,如果 von Neumann 条件满足,那么格式具备 l_2 稳定性.

推论 5.1 令 $\xi=0$,则 $z(0)=1$ 必然为一特征值.

证明 由相容性定义,当 $\xi=0$ 时,相当于解在空间为常数.此时根据相容性定义,必有 $z(0)=1$. □

对于所考虑的格式,假设 von Neumann 条件满足. 此时按特征值的特性可将格式归纳为三种类型:

定义 5.9 (耗散格式与非耗散格式) 令 von Neumann 条件满足,即特征值满足下述条件

$$|z_\tau|\leqslant 1, \forall_\tau=1,2,\ldots,(s+1)m, \forall \xi \in \mathbf{R}.$$

A) 如果对于所有的 τ 和 $0<|\xi|\leqslant\pi$,所有 z_τ 都满足 $|z_\tau|<1$,则称格式为(严格)耗散格式.

B) 如果对于所有的 τ 和 $0<|\xi|\leqslant\pi$,所有 z_τ 都满足 $|z_\tau|=1$,则称格式为非耗散(单位)格式.

C) 如果对于某些 τ 和 ξ 有 $|z_\tau|<1$,对于另一些 τ 和 ξ 有 $|z_\tau|=1$,则称格式为部分耗数格式.

5.2.1.3 例 子

考虑运输方程 $w_t+aw_x=0$,这里 $a>0$. CFL 数定义为

$$\mathrm{CFL}=\frac{ak}{h}.$$

例 1 欧拉中心格式

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\mathrm{CFL}}{2}(w_{j+1}^n - w_{j-1}^n).$$

将 $w_j^n = z^n e^{ij\xi} y$ 代入上述格式，得特征值问题 $My=0$. 这里

$$M = z - 1 + \frac{\mathrm{CFL}}{2}(e^{i\xi} - e^{-i\xi}).$$

令 $\det M = 0$，得

$$z = 1 + i\mathrm{CFL}\sin(\xi).$$

从而有

$$|z| = \sqrt{1 + \mathrm{CFL}^2\sin^2(\xi)} > 1\ \forall \xi > 0.$$

因此对于任一 CFL 数，von Neumann 条件不满足，即欧拉中心差分格式无条件不稳定.

例 2 Lax Wendroff 格式

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\mathrm{CFL}}{2}(w_{j+1}^n - w_{j-1}^n) + \frac{\mathrm{CFL}^2}{2}(w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n).$$

不难得到

$$M = z - 1 + \frac{\mathrm{CFL}}{2}(e^{i\xi} - e^{-i\xi}) - \frac{\mathrm{CFL}^2}{2}(e^{i\xi} - 2 + e^{-i\xi}).$$

令 $\det M = 0$，得

$$z = 1 + i\mathrm{CFL}\sin(\xi) + \mathrm{CFL}^2[\cos(\xi) - 1].$$

从而有

$$|z| = \sqrt{\{1 + \mathrm{CFL}^2[\cos(\xi) - 1]\}^2 + \mathrm{CFL}^2\sin^2(\xi)}.$$

为了使 $|z| \leqslant 1$，必需令下面的不等式满足

$$\{1 + \mathrm{CFL}^2[\cos(\xi) - 1]\}^2 + \mathrm{CFL}^2\sin^2(\xi) \leqslant 1.$$

即

$$2[\cos(\xi) - 1] + \mathrm{CFL}^2[\cos(\xi) - 1]^2 + [1 - \cos^2(\xi)] \leqslant 0.$$

因 $1 - \cos(\xi) > 0$，必须有

$$\mathrm{CFL}^2[1 - \cos(\xi)] - 1 + \cos(\xi) \geqslant 0.$$

即

$$\mathrm{CFL} \leqslant 1.$$

因此，仅当 $\mathrm{CFL} \leqslant 1$ 时，格式是稳定的. 因格式是在满足条件 $\mathrm{CFL} \leqslant 1$ 的情况下稳定，所以称格式条件稳定. 因 CFL 数表示每一时间步数值波移动的网格点个数，所以该格式的稳定性条件表明，对于两层三点显式格式，在每一个时间步波移动的距离不能超过一个网格点，否则不稳定.

特征值 z 的表达式也可以写成

$$|z| = \sqrt{1 - \mathrm{CFL}^2(1 - \mathrm{CFL}^2)(1 - \cos(\xi))^2}.$$

因此，对于所有 $\xi > 0$ 和 $\mathrm{CFL} < 1$，$|z| < 1$，所以 Lax-Wendroff 格式是严格耗散的.

例 3 跳蛙格式

$$w_j^{n+1} = w_j^{n-1} - \mathrm{CFL}(w_{j+1}^n - w_{j-1}^n).$$

对于该格式有

$$z - \frac{1}{z} = -2i\mathrm{CFL}\sin(\xi).$$

令 $z=\rho e^{i\theta}$. 经计算发现,对所有的 CFL≤1,有: $\rho=1$. 因此,当 CFL≤1,跳蛙格式稳定,而且属于非耗散型格式.

例 4　欧拉向后差分格式

$$w_j^{n+1}+\frac{\mathrm{CFL}}{2}(w_{j+1}^{n+1}-w_{j-1}^{n+1})=w_j^n.$$

相应的特征值为 $z=1/(1+i\mathrm{CFL}\sin(\xi))$. 计算发现,对于所有的 CFL 数,有 $|z|\leqslant 1$. 因此,格式无条件稳定. 另外发现,当 $\xi=0$ 或者 $\xi=\pm\pi$ 时,有 $z=1$;而当 $0<|\xi|<\pi$ 时,有 $|z|<1$. 因此该格式为部分耗散格式.

5.2.1.4　两层格式的稳定性分析

对于两层格式

$$Q_1 w_j^{n+1}=Q_0 w_j^n, \tag{5.8}$$

von Neumann 分析可以进行简化. 定义放大矩阵

$$G(\xi,\mathrm{CFL})=\widetilde{Q}_1^{-1}(\xi)\widetilde{Q}_0(\xi),$$

和放大因子(即放大矩阵的谱半径)

$$\rho(\xi,\mathrm{CFL})=\rho[G(\xi,\mathrm{CFL})].$$

定理 5.3　令 G 为正交矩阵. 两层格式 l_2 稳定的充分必要条件为

$$\rho(\xi,\mathrm{CFL})\leqslant 1,\ \forall\xi\geqslant 0. \tag{5.9}$$

证明. 将格式写成

$$U^{n+1}=CU^n,$$

从而 l_2 稳定性条件为

$$\|(C)^n\|_2\leqslant K,\ \forall n>0.$$

利用 Parseval 关系式,上述条件等价为

$$\|(G)^n\|_2\leqslant K_1,\ \forall\xi\geqslant 0. \tag{5.10}$$

因 G 为正交矩阵,所以从矩阵理论有

$$|\rho^n|\leqslant\|(G)^n\|_2\leqslant K_2|\rho^n|. \tag{5.11}$$

如果 $\rho(\xi,\mathrm{CFL})\leqslant 1$,则式(5.11)的右边不等式意味着式(5.10)成立. 反过来,如果式(5.10)成立,则式(5.11)的左边不等式意味着 $\rho(\xi,\mathrm{CFL})^n\leqslant K,\ \forall n$ 即 $\rho(\xi,\mathrm{CFL})\leqslant 1$. □

条件(5.9)是 von Neumann 条件的另外一种形式. 如果 G 不是正交矩阵,则上述条件只是 l_2 稳定的必要条件. 在下面两种情况,G 是正交矩阵.

i) 方程为标量方程($m=1$).

ii) 算子 $A_{1,\nu}$ 和 $A_{0,\nu}$ 均为可以对角化的雅可比矩阵 A 的多项式,从而 G 也为 A 的多项式,即 $G=P(A)$. 记 $\lambda(\Phi)$ 为 Φ 的特征值,于是从 $G=P(A)$ 得 $\lambda(G)=P(\lambda(A))$.

5.2.1.5　变系数问题的稳定性分析

如果问题为线性变系数问题,则 von Neumann 条件只是稳定性的必要条件而不是严

格充分条件.将系数冻结为某一常数,对由此获得的常系数问题进行 von Neumann 分析,称为当地 von Neumann 分析.

定义 5.10 如果格式满足当地 von Neumann 条件,则称格式当地稳定;如果格式对变系数情况稳定,则称为整体稳定.

定义 5.11 (**Kreiss 耗散定义**) 考虑两层格式.如果存在正整数 p 和正常数 δ 使得对所有 x,都有

$$\rho[G(x,\xi;\mathrm{CFL})]\leqslant 1-\delta\mid\xi\mid^{2p},0<\mid\xi\mid\leqslant\pi,$$

则称格式具有 $2p$ 阶耗散.

定理 5.4 (**Kreiss 1964**) 考虑具有 $2p$ 阶耗散和具有$(2p-1)$阶精度的格式,如果 G 是海米顿矩阵、一致有界而且是 x 的 Lipshitz 连续函数,那么格式整体稳定.

5.2.1.6 非线性问题的稳定性分析

假设格式线性稳定,则可以用下述方法研究非线性稳定性.

A) 共振波方法. 将解表示为谐波的叠加.如果出现不同波长的波共振,那么格式可能非线性不稳定.

B) 等价方程法.格式的等价方程(后面将要介绍)如果不适定,则格式非线性不稳定.

C) 线性化分析法.将非线性格式线性化.如果线性化格式与某不适定的方程相容,则格式非线性不稳定.第四章中在讨论人工黏性时举了这样一个例子.

5.2.1.7 多维问题 von Neumann 分析

在网格点 $x_1=ih^{(x)},x_2=jh^{(y)},x_3=kh^{(z)}$上的数值解记为 $w^n_{i,j,k}$.在傅里叶空间,谐波的形式为 $w^n_{i,j,k}=z^ne^{ii\xi}e^{ij\eta}e^{ik\gamma}Y$,这里 ξ、η 和 γ 分别为x、y 和z 方向的波数.将 $w^n_{i,j,k}=z^ne^{ii\xi}e^{ij\eta}e^{ik\gamma}Y$ 代入相应的格式,便得特征值问题

$$M(z,\xi,\eta,\gamma)Y=0. \tag{5.12}$$

此时 von Neumann 条件可以表述为:对所有满足$|z|>1$ 的 z 有

$$\det M\neq 0,\ \forall\,\xi\in\mathbf{R},\ \forall\,\eta\in\mathbf{R},\ \forall\,\gamma\in\mathbf{R}.$$

如果该条件满足,则称格式稳定.

5.2.2 混合初边值问题的稳定性理论

混合初边值问题的分析理论主要由 Gustafsson, Kreiss 和 Sundström (GKS,1972)建立,因而也称 GKS 理论.

5.2.2.1 引　　言

一般的初边值问题定义在有限区域,如 $0<x<1$.但 GKS 稳定性定义正好使得成立

这样的结论：如果格式柯西稳定并且每一个边界的边界处理各自稳定，那么有限区域上的混合初边值问题也稳定.

柯西稳定性理论在前面已经介绍了. 单独边界的稳定性要通过考虑半无限区域的稳定性获得.

将左边界向左延伸至无限远、右边界向右延伸至无限远，便得到定义在 $-\infty<x<\infty$ 上的不带边界条件的柯西问题；

将右边界向右延伸至无限远，便得到定义在 $0<x<\infty$ 上的(只在左边存在边界条件的) 右半无限区域问题；

将左边界向左延伸至无限远，便得到定义在 $-\infty<x<1$ 上的(只在右边存在边界条件的) 左半无限区域问题.

作为前提条件，假定内点格式柯西稳定，即满足 von Neumann 条件. 这样就只需要考虑半区域问题. 因对称性，只需就右半区域问题来介绍. 当遇到左半区域问题时，可以通过令 $x\to -x$ 进行坐标变换，将左半区域问题转换为右半区域问题，使用右半区域的分析方法分析稳定性.

值得注意的是，GKS 稳定性理论建立在一种特殊的范数上，尽管有限区域问题 GKS 稳定，可能按其他定义不一定稳定(Beam, Warming & Yee, 1982; Trefethen, 1984, 1985). 例如，如果需要长时间对时间积分，则 GKS 稳定不一定能保证解严格有界，还必需要求满足更严格的所谓 P 稳定(即 practically stable) 条件. 特别对于定常问题，GKS 稳定不一定能保证收敛. 在以后的定常问题介绍中，还会单独讨论这个问题. 一般而言，如果内点格式属于严格耗散格式，则 GKS 稳定就足够了.

5.2.2.2 混合初边值问题的定义

考虑右半区域双曲问题

$$w_t+Aw_x=Bw+F,\ x\geqslant 0,\ t\geqslant 0; \tag{5.13}$$

$$w(x,0)=w_0(0),\ x\geqslant 0; \tag{5.14}$$

$$w^I(0,t)=Sw^{II}(0,t)+g(t). \tag{5.15}$$

这里 A 和 B 为两个常数矩阵. 因考虑的是双曲系统，所以不失一般性，可以假设 A 为对角矩阵

$$A=\mathrm{diag}(A^I,A^{II}).$$

这里 $A^I=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\ldots,a_l)>0$, $A^{II}=\mathrm{diag}(a_{l+1},a_{l+2},\ldots,a_m)<0$. 在边界条件(5.15)中，$w^I$ 和 w^{II} 分别对应 A 的正部和负部，S 为一般有界矩阵(一般不为方阵).

为了方便，定义

$$N_{n_1,n_2}=\{n_1,n_1+1,\ldots,n_2-1,n_2\},$$

$$J_{j_1,j_2}=\{j_1,j_1+1,\ldots,j_2-1,j_2\}.$$

初边值混合问题(5.13)至(5.15)的离散采用 $s+1$ 时间层和 $l+r+1$ 个空间点格式

$$\sum_{\tau=1}^{s}Q_\tau w_j^{n+\tau}=kF^n,\ \forall j\in J_{1,\infty}; \tag{5.16}$$

$$w_j^{\tau k} = w_\tau(jh), \forall j \in J_{-l+1,\infty}, \tau \in N_{-s+1,0}; \tag{5.17}$$

$$w_\mu^{n+1} = \sum_{\tau=1}^{-s} S_\tau^{(\mu)} w_\mu^{n+\tau} + g_\mu^n, \forall \mu \in J_{-l+1,0}. \tag{5.18}$$

这里 $Q_\tau = \sum_{\nu=-l}^{r} A_{\tau,\nu} E^\nu, Ew_j = w_{j+1}, S_\tau^{(\mu)} = \sum_{\nu=0}^{q} C_{\tau,\nu}^{(\mu)} E^\nu$.

定义 5.12　称(5.18)为平移边界条件，如果各边界条件都具有同样的式子，即所有系数 $C_{\tau,\nu}^{(\mu)}(\mu \in J_{-l+1,0})$均与 μ 无关.

5.2.2.3　正规模态分析

为了阐明主要意思，先考虑运输方程

$$w_t + aw_x = 0.$$

在傅里叶分析即所谓的正规模态分析中，考察谐波解

$$w(x,t) = e^{i(\omega t - \xi x)}.$$

这里 $\omega \in \mathbf{R}$ 为频率，$\xi \in \mathbf{R}$ 为波数.

将谐波解代入运输方程，便得如下的色散关系式

$$\omega = a\xi.$$

对于离散情况的一般形式(即系统方程)，也同样考察如下形式的解

$$w_j^n = \phi_0 e^{i(\omega nk - \xi jh)}.$$

这里 $\phi_0 \in \mathbf{R}^m$. 为了方便，记

$$z = e^{i\omega k}, \kappa = e^{-i\xi h}.$$

从而正规模态解可以写成

$$w_j^n = z^n \kappa^j \phi_0. \tag{5.19}$$

在正规模态分析中，$\omega \in \mathbf{C}, \kappa \in \mathbf{C}$，所以 z 和 κ 的模均可不等于 1.

将(5.19)代入格式，并且令 $F=0$，我们得

$$\sum_{\tau=1}^{-s} z^\tau Q_\tau(\kappa)\phi_0 = 0,\ Q_\tau(\kappa) = \sum_{\nu=-l}^{r} A_{\tau,\nu}\kappa^\nu.$$

为了获得非零解，必须令

$$\det Q(z,\kappa) = 0,\ Q(z,\kappa) = \sum_{\tau=1}^{-s}\sum_{\nu=-l}^{r} A_{\tau,\nu} z^\tau \kappa^\nu. \tag{5.20}$$

设$|\kappa| = 1$，那么上述方程称为色散方程. 对于每一个 $\kappa = e^{i\xi}(\xi \in \mathbf{R})$，色散方程决定了$(s+1)m$个特征值$z_\tau$. 这些特征值决定了格式的柯西稳定性. 反过来，对于每个 $z \in \mathbf{C}$，方程(5.20)决定了$(l+r)m$ 个根κ_ν，因而称特征方程.

如果格式能求解(这是格式可以使用的先决条件)，则有下面的结果：对于每个$z \in \mathbf{C}$，如果$|z| > 1$，那么特征方程(5.20)正好有$(l+r)m$ 个根(重根的重复个数也考虑进去)，并且被复平面内单位圆周分为两部分

$$K_- = \{\kappa(z);\ |\kappa| < 1\} \text{ 和 } K_+ = \{\kappa(z);\ |\kappa| > 1\},$$

如果重根的个数也考虑进去，那么有 ml 个属于$\kappa \in K_-$ 的根(圆内根)和 mr 个属于

$\kappa \in K_+$的根(圆外根).当$|\kappa|=1$,格式的柯西稳定假设意味着$|z|\leqslant 1$,因此对于$|z|>1$,没有一个根满足$|\kappa|=1$.

对于右半区域问题,当$|z|>1$时,属于$l_2(x)$的解(5.19)可以写成

$$w_j^n = z^n \sum_{\kappa_\nu \in K_-} P_\nu(j)\kappa_\nu^j. \tag{5.21}$$

在上式中,K_+不能计入的原因是,$|\kappa_{\kappa \in K_+}|^{j \to \infty} \to \infty$,这不符合柯西稳定性假设.

在式(5.21)中,$P_\nu(j)$是κ_ν的多项式

$$P_\nu(j) = \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} V_{\nu,k} j^k c_{\nu,k}.$$

$V_{\nu,k}$为$Q(z,\kappa_\nu)$线性无关的特征向量,$c_{\nu,k}(k=0,1,\ldots,m_\nu-1)$为由边界条件决定的未知系数.对于标量方程格式,可以取$V_{\nu,k}=1$.

因$\sum m_\nu = l$,所以在解(5.19)中存在lm个未知系数$c_{\nu,k}$.记$C=\{c_{\nu,k}\}$,则属于$l_2(x)$的解的一般形式为$w_j^n = z^n QC$,这里Q为$m \times lm$矩阵.

在正规模态分析中,还得考虑$|z|\to 1$的情况.根据格式的相容性假设,当$z=1$,必存在一个根满足$\kappa=1$.当$|z|\to 1$,特征方程的根可以细分成下面四个组:

$$K_< = \{\kappa|_{|z|>1} \in K_-;\ |\kappa|_{|z|\to 1} < 1\},$$
$$K_{<,=} = \{\kappa|_{|z|>1} \in K_-;\ |\kappa|_{|z|\to 1} = 1\},$$
$$K_> = \{\kappa|_{|z|>1} \in K_+;\ |\kappa|_{|z|\to 1} > 1\},$$
$$K_{>,=} = \{\kappa|_{|z|>1} \in K_+;\ |\kappa|_{|z|\to 1} = 1\},$$

如果将复根的重复次数计入,则有ml个属于$K_- = K_< + K_{<,=}$的根(内根),mr个属于$K_+ = K_> + K_{>,=}$的根(外根).

对于$|z|\to 1$,在解的表达式(5.21)中还是使用$K_- = K_< + K_{<,=}$.

扰动测试 通过求解特征方程,如果在$|z|=1$时发现某个根κ_ν满足$|\kappa_\nu|=1$,我们会问如何确定$\kappa_\nu \in K_{<,=}$或$\kappa_\nu \in K_{>,=}$?如果没有其他方式判别,便可采用下面的扰动测试.

假设$|\kappa|=1(|z|=1)$.将z扰动到圆周外$z'=z(1+\mu)$.这里$\mu>0$为小量.令$\kappa(z')=\kappa(z)(1-\varepsilon)$.将$z'=z(1+\mu)$和$\kappa(z')=\kappa(z)(1-\varepsilon)$代入特征方程,忽略高阶小量,必得

$$\varepsilon = c\mu.$$

可以证明c必为不等于零的实数.如果$c>0$,那么表示所考虑的根是从单位圆周以内过来的,即$\kappa \in K_{<,=}$,否则$\kappa \in K_{>,=}$.

将(5.21)代入边界条件(5.18),便得到具有lm个关系式的代数方程

$$M(z)C = G. \tag{5.22}$$

这里$C=\{c_{\tau,\alpha}\}$,$M=M(z)$为$lm \times lm$矩阵.

定义 5.13 (GKS 稳定性) 对于所有$|z|\geqslant 1$,如果$\det M(z)\neq 0$,则称混合初边值问题GKS稳定.换言之,如果代数方程$\det M(z)=0$的所有根(特阵值)均满足$|z|<1$,则问题GKS稳定.

GKS 稳定属于很强的稳定.某些 GKS 不稳定的方法可能在另外一种意义下稳定,称为弱稳定.Wu(1996a)在研究分区算法解的唯一性时发现,某些算法虽 GKS 不稳定,但能算下去.由此他构造了下面很容易检验的弱稳定条件:

定义 5.14 (弱稳定性条件) 如果方程 $\det M(z)=0$ 的解满足 $|z|\leqslant 1$(此时 GKS 不稳定),并且存在常数 K,使不等式

$$|c_{\nu,k}|\leqslant K\frac{||\kappa_\nu|-1|^k}{||z|-1|},k=1,2,\ldots,m_\nu,$$

成立,则混合初边值问题弱稳定.

5.2.2.4　实例分析

以上理论使用起来似乎有一定的难度.对于系统方程尤其如此.但对于标量方程,并不如此困难.下面举一些例子,只考虑运输方程

$$w_t+aw_x=0.$$

两层三点耗散格式　最著名的例子是 Lax-Wendroff 格式($0<\mathrm{CFL}=ak/h\leqslant 1$)

$$w_j^{n+1}=w_j^{n-1}-\frac{\mathrm{CFL}}{2}(w_{j+1}^n-w_{j-1}^n)+\frac{\mathrm{CFL}^2}{2}(w_{j+1}^n-2w_j^n+w_{j-1}^n).$$

将 $w_j^n=z^n\kappa^j w_0$ 代入格式,便得特征方程

$$(z-1)\kappa=-\frac{\mathrm{CFL}}{2}(\kappa^2-1)+\frac{\mathrm{CFL}^2}{2}(\kappa-1)^2.$$

首先证明下面的引理.

引理 5.4　考虑任意两层三点耗散格式.记 $\kappa_1\in K_-$ 和 $\kappa_2\in K_+$.

如果 $a>0$,则有

$$|\kappa_1|<1,\forall\ |z|=1,z\neq 1.$$

并且有 $\kappa_1(z=1)=1$.

如果 $a<0$,则有

$$|\kappa_1|<1,\forall\ |z|=1.$$

证明　如果 $|\kappa_1|=1,\kappa_1\neq 1$,则从耗散定义得 $|z|<1$.因此当 $|z|=1$ 和 $z\neq 1$ 时,必有 $|\kappa_1|<1$.

所以只需考虑 $z=1$.此时只有两种情况:或者 $\kappa_1=1$,或者 $|\kappa_1|<1$.为了简单,这里只考虑 Lax-Wendroff 格式.更一般的证明可以参阅(Goldberg and Tadmor,1981).由特征方程得

$$z-1=-c(\kappa-1)+O((\kappa-1)^p),p>1.\tag{5.23}$$

这里 $c=\frac{1}{2}\frac{k}{h}\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)a$.假设 $\kappa=1$.将 $\kappa=1-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$)代入(5.23),得 $z=1+\mu$,这里

$$\mu=\frac{k}{h}a\varepsilon+O(\varepsilon^p),p>1.$$

因 $\mathrm{sign}(\mu)=\mathrm{sign}(a)$,所以有:

$$\kappa_1=1,\forall a>0;\ \kappa_1<1,\ \forall a<0.\quad\square$$

很容易证明，对于 $a>0$，给解析条件是 GKS 稳定的. 下面考虑 $a<0$（出流条件）. 对于所考虑的格式，使用引理，很容易验证下面的结论：

边界条件	$M(z)$	$\forall\|z\|\geqslant 1$	稳定性
$w_0^n=w_1^n$	$1-\kappa_1$	$\|M(z)\|\neq 0$	稳定，
$w_0^n=2w_1^n-w_2^n$	$(1-\kappa_1)^2$	$\|M(z)\|\neq 0$	稳定，
$w_0^n=w_1^{n-1}$	$z-\kappa_1$	$\|M(z)\|\neq 0$	稳定，
$w_0^n=2w_1^{n-1}-w_2^{n-2}$	$(z-\kappa_1)^2$	$\|M(z)\|\neq 0$	稳定.

非耗散格式例子　考虑跳蛙格式（$0<\mathrm{CFL}=a\kappa/h\leqslant\frac{1}{2}$）

$$w_j^{n+1}=w_j^{n-1}-\mathrm{CFL}(w_{j+1}^n-w_{j-1}^n).$$

将 $w_j^n=z^n\kappa^jw_0$ 代入格式得特征方程

$$z-\frac{1}{z}=-\mathrm{CFL}\left(\kappa-\frac{1}{\kappa}\right). \tag{5.24}$$

只考虑出流边界. 首先用下面边界条件

$$w_0^n=w_1^n.$$

将 $w_j^n=z^n\kappa^jw_0$ 代入该边界条件得

$$M(z)=\kappa-1.$$

因此 $M=0$ 意味着 $\kappa=1$. 从特征方程(5.24)得 $z(\kappa=1)=\pm1$. 通过扰动测试，发现当 $z=-1$时，$\kappa=1$ 属于 K_-. 因此存在满足 $|z|=1$ 的特征值，即问题对所有 CFL 都 GKS 不稳定.

下面采用一阶单侧格式作为边界条件

$$w_0^{n+1}=w_0^n-\mathrm{CFL}(w_1^n-w_0^n).$$

将 $w_j^n=z^n\kappa^jw_0$ 代入上述边界条件得

$$M(z)=(z-1)+\mathrm{CFL}(\kappa-1).$$

令 $z=re^{i\theta}$. 由 $M(z)=0$ 得

$$\kappa=\frac{re^{i\theta}-1+\mathrm{CFL}}{\mathrm{CFL}}.$$

从而有

$$|\kappa|=\frac{\sqrt{r^2+2r(\mathrm{CFL}-1)\cos\theta+(\mathrm{CFL}-1)^2}}{\mathrm{CFL}}.$$

如果 $|z|\geqslant1(r>1)$ 和 $z\neq1(\theta\neq0)$，则由上式得 $|\kappa|>1$，即满足上式的 κ 不属于 K_-. 当 $z=1$，由特征方程(5.24)得 $\kappa=\pm1$. 因 $M(z=1,\kappa=-1)\neq0$，所以只需考虑 $z=1,\kappa=1$. 采用扰动测试可以证明，对于 $z=1,\kappa=1$ 属于 K_+. 因此，所考虑的问题稳定.

方便分析法　以上考虑了几个三点格式. 对于多点格式和平移边界条件，存在更容易检验的稳定准则(Goldberg and Tadmor，1981).

5.3　误差分析

5.3.1　傅里叶分析

考虑运输方程 $w_t + aw_x = 0$. 在傅里叶或正规模态分析当中,考察谐波解

$$w(x,t) = e^{i(\omega t - \xi x)}.$$

这里 $\omega \in \mathbf{R}$ 为频率,$\xi \in \mathbf{R}$ 为波数. 将谐波解代入运输方程便得如下的(精确)色散关系式

$$\omega = a\xi. \tag{5.25}$$

上面的色散关系式表明,对于每一个 ξ,都存在唯一的频率 ω,而且频率为实数.

对于离散情况(考虑系统方程),考察类似表达式(正规模态解)

$$w_j^n = \phi_0 e^{i(\omega nk - \xi jh)}. \tag{5.26}$$

这里 $\phi_0 \in \mathbf{R}^m$. 将正规模态解代入格式得

$$D(\omega,\xi)\phi_0 = 0.$$

为了使上述方程有非零解,系数矩阵的行列式必须为零,即

$$\det D(\omega,\xi) = 0. \tag{5.27}$$

式(5.27)称为数值色散关系式,与精确的色散关系式一般有一定的差别. 这种差别即是对误差的一种衡量.

下面考察两个例子.

第一个例子为跳蛙格式

$$w_j^{n+1} = w_j^{n-1} - \mathrm{CFL}(w_{j+1}^n - w_{j-1}^n).$$

将(5.26)代入此格式得

$$\det D(\omega,\xi) = h\sin(\omega k) - ak\sin(\xi h).$$

由此得色散关系式

$$h\ \sin(\omega k) = ak\ \sin(\xi h).$$

当 $\xi \to 0$,有 $\omega = a\xi$. 因此,当 $\xi \to 0$ (长波范围),数值色散关系式退化为精确色散关系式. 当 $\xi > 0$,两者之间有差别,这种差别在短波($\xi h \to \pi$) 范围尤其大.

第二个例子为一阶迎风格式 ($a > 0$).

$$w_j^{n+1} = w_j^{n-1} - \mathrm{CFL}(w_j^n - w_{j-1}^n).$$

色散关系式为

$$\det D(\omega,\xi) = e^{i\omega k} - 1 + \mathrm{CFL}(1 - e^{i\xi h}) = 0.$$

此时 ω 包含一个实部 ω_r 和一个虚部 ω_i,即: $\omega = \omega_r + i\omega_r$. 它们分别满足关系式

$$e^{-\omega_i k}\cos(\omega_r k) = 1 + \mathrm{CFL}[\cos(\xi h) - 1],$$

$$e^{-\omega_i k}\sin(\omega_r k) = \mathrm{CFL}\sin(\xi h).$$

与前面相似,当 $\xi \to 0$,有 $\omega = a\xi$. 当 $\xi > 0$,有 $\omega_i > 0$,并且 $\omega_r \neq a\xi$.

由色散关系式(5.27)确定的 w 为复数,可以写成

$$\omega = \omega_r + \iota\omega_i, \omega_r \in \mathbf{R}, \omega_i \in \mathbf{R}, \iota = \sqrt{-1}.$$

一般情况下，$\omega_r \neq a\xi, \omega_i \neq 0$. 而对于精确色散关系式有 $\omega = a\xi$.

定义 5.15 （群速度与相速度） 考虑一般的色散关系式 $\omega = \omega(\xi)$. 群速度定义为 $c = \frac{d\omega}{d\xi}$；相速度定义为：$c = \frac{\omega}{\xi}$.

粗略地说，群速度为能量包（随质点）移动的速度，而相速度为波型移动的速度.

对于精确方程，群速度与相速度均等于 a. 但对于离散防程，除 $\xi = 0$ 两者相等外，群速度与相速度一般不同. 格式的行为往往可以与群速度联系起来(Trefethen,1982).

对于精确解与数值解，均可统一写成

$$w_j^n = e^{\iota\omega nk} e^{-\iota\xi jh}. \tag{5.28}$$

对于精确解，具体表达式为

$$w_j^n = e^{\iota a\xi nk} e^{-\iota\xi jh}. \tag{5.29}$$

对于数值解，具体表达式为

$$w_j^n = e^{-\omega_i nk} e^{\iota\omega_r nk} e^{-\iota\xi jh}. \tag{5.30}$$

比较(5.30)和(5.29)，我们定义

定义 5.16 振幅误差（扩散误差，耗散误差）$\varepsilon_D = e^{-\omega_i k}$. 相位误差（色散误差）$\varepsilon_\Phi = \frac{\omega_r}{a\xi}$.

振幅误差表示，对于 $\xi > 0$，波幅不是常数，而是按 ε_D^n 衰减. 对于跳蛙格式，$\varepsilon_D = 1$，所以不存在振幅误差. 对于一阶迎风格式

$$\varepsilon_D = \sqrt{1 + 2d + d^2 + \mathrm{CFL}^2 \sin^2(\xi h)} < 1, \forall \mid \xi \mid > 0.$$

这里 $d = \mathrm{CFL}[\cos(\xi h) - 1]$. 例如当 $\xi h = \pi$（最短波），有 $\varepsilon_D = (1 - \mathrm{CFL})^2$. 因此，短波将很快被耗散掉. 耗散速度在 CFL→1 达到最大值. 振幅误差有正反两个方面的作用. 从精度考虑，振幅误差使精度降低，尤其是最大值减小，最小值增加，即产生低估效应. 如果用以计算定常问题，则可把伪非定常解与定常解看成是一种误差，如果格式的振副误差大，则将出现很快的收敛速度.

相位误差表示，当 $\xi > 0$ 时，数值波移动的速度不同于 a. 对于跳蛙格式

$$\varepsilon_\Phi = \frac{1}{a}\sin^{-1}[\mathrm{CFL}\sin(\xi h)],$$

对于一阶迎风格式

$$\varepsilon_\Phi = \frac{1}{a}\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{\mathrm{CFL}\sin(\xi h)}{1 + \mathrm{CFL}[\cos(\xi h) - 1]}\right],$$

如果取 CFL = 1，则 $\varepsilon_\Phi = 1$，即一阶迎风格式在 CFL = 1 时不存在相位误差. 相位误差是散值振荡的根本原因，有百害而无一利.

无论是振幅误差还是相位误差，对于长波它们都很小，对于短波它们一般都很大. 很显然，激波属于短波，因此如果使用一阶迎风格式，则振幅误差大将激波抹平，因相位误差小而不存在数值振荡.

5.3.2 当地误差与整体误差

5.3.2.1 当地误差

考虑方程

$$w_t + f(w)_x = 0, \tag{5.31}$$

将格式写成一般形式

$$L = \sum_{\tau=-1}^{s} H_\tau(w_{j-l}^{n-\tau}, \ldots, w_{j-1}^{n-\tau}, w_j^{n-\tau}, w_{j+1}^{n-\tau}, \ldots, w_{j+r}^{n-\tau}) = 0. \tag{5.32}$$

在格式(5.32)中使用泰勒展开,得

$$cL = (w_t + f(w)_x)_j + d_j. \tag{5.33}$$

这里 c 与 w 无关,

$$d_j = O[k^p] + O[h^q], \tag{5.34}$$

将精确解代入,有$(w_t + f(w)_x)_j = 0$,因此(5.33)退化为

$$cL = d_j. \tag{5.35}$$

这里 d_j 称为当地截断误差.对于光滑解,只保留误差的主部

$$d_l = K_1 k^p + K_2 h^q.$$

这里 K_1 和 K_2 与解的时空导数有关.有时也把误差的主部称为当地截断误差.

定义 5.17 如果 $K_1 \neq 0, K_2 \neq 0$.则格式(5.32)的时间精度为 p 阶,空间精度为 q 阶.

例.考虑运输方程 $w_t + w_x = 0$ 的 Lax-Wendroff 格式

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\sigma}{2}(w_{j+1}^n - w_{j-1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n).$$

使用方程 $w_t + w_x = 0$ 并对精确解 $w = w_j^n$ 进行泰勒展开

$$w_j^{n+1} = w + kw_t + \frac{k^2}{2}w_{tt} + \frac{k^3}{6}w_{ttt} + O[k^4],$$

$$w_{j+1}^n = w + hw_x + \frac{h^2}{2}w_{xx} + \frac{h^3}{6}w_{xxx} + O[h^4],$$

$$w_{j-1}^n = w - hw_x + \frac{h^2}{2}w_{xx} - \frac{h^3}{6}w_{xxx} + O[h^4],$$

得

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}L &= w_t + \frac{k}{2}w_{tt} + \frac{k^2}{6}w_{ttt} + O[k^3] + w_x + \frac{1}{6}h^2 w_{xxx} + O[h^3] - \frac{1}{2}kw_{xx} + O[kh^2] \\ &= w_t + w_x + \frac{1}{2}k(w_{tt} - w_{xx}) + \frac{1}{6}w_{ttt}k^2 + \frac{1}{6}h^2 w_{xxx} + O[k^3] + O[h^3] + O[hk^2] + O[h^2k] \\ &= \frac{1}{6}w_{ttt}k^2 + \frac{1}{6}h^2 w_{xxx} + O[k^3] + O[h^3] + O[hk^2] + O[h^2k].\end{aligned}$$

因此截断误差的主部为

$$d = \frac{1}{6}w_{ttt}k^2 + \frac{1}{6}h^2 w_{xxx}.$$

所以 Lax-Wendroff 格式在时间与空间上均具有二阶精度.

5.3.2.2　整体误差

整体误差为数值解与精确解之间的差别.各网格点上的当地误差通过格式耦合,使得整体误差一般不等于当地误差.

用 Lax-Wendroff 格式来离散方程 $w_t + w_x = cx$.考察定常解.在定常状态,Lax-Wendroff 格式可以写为

$$-\frac{1}{2h}(w_{j+1} - w_{j-1}) + \frac{\sigma}{2h}(w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}) + f_j = 0, f_j = cx_j.$$

计算表明,当地截断误差的主部为 $d = -\sigma h^2 c$.

记整体误差为 $e_j = w(x_j) - w_j$.这里 $w(x_j)$为精确解.将 $w_j = w(x_j) - e_j$ 代入 Lax-Wendroff 格式,得

$$(\sigma - 1)e_{j+1} - 2\sigma e_j + (\sigma + 1)e_{j-1} = d. \tag{5.36}$$

这里

$$\begin{aligned} d &= -\frac{1}{2h}(w(x_{j+1}) - w(x_{j-1})) + \frac{\sigma}{2h}(w(x_{j+1}) - 2w(x_j) + w(x_{j-1})) + f_j \\ &= -\sigma ch^2. \end{aligned}$$

可以验证,误差方程(5.36)的解为:

$$e_j = c_1 + c_2\left(\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}\right)^j + dj. \tag{5.37}$$

这里 c_1 和 c_2 为带定系数,由边界条件确定.

显然,整体误差 e_j 不同于当地误差 d.

对于非定常问题,整体误差较难获得.使用傅里叶变换技术,可以获得整体误差的具体表达式(Sköllermo,1979).

有时需要知道整体误差的阶数,称为收敛(到精确解的)速度.

定义 5.18　如果整体误差为 $O[k^p]$(或 $O[h^p]$),则称格式的收敛速度为 p.

在一定的稳定性假设下,收敛速度与当地截断误差可以联系起来.对于均匀网格上的线性问题,稳定性意味着收敛速度等于当地截断误差的阶数.有时估计收敛速度比给出整体误差的具体表达式更容易.

对于某些情况,收敛速度高于当地截断误差的阶数,这种情况称为超收敛.

非线性问题的收敛速度估计一般很困难.

5.3.2.3　修正方程

假设数值解足够光滑.格式与原偏微分方程相比存在一定的误差.但格式精确地等价于某个偏微分方程,称为修正方程或等价方程.简单而言,修正方程即为数值解所满足的

偏微分方程.修正方程有严格的推导方法,在稳定性和精度分析、以及方法构造上扮演了一定的角色(Hirsch,1990).

这里就运输方程 $w_t + w_x = 0$ 和一阶迎风格式

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \sigma(w_j^n - w_{j-1}^n),$$

来简单说明一下修正方程的推导.令 $w_j^n = w$ 为数值解(而非精确解),用泰勒展开得

$$w_j^{n+1} = w + kw_t + \frac{k^2}{2}w_{tt} + O[k^3],$$

$$w_{j-1}^n = w - hw_x + \frac{h^2}{2}w_{xx} + O[h^3].$$

将上述表达式代入格式得

$$w_t + w_x = -\frac{k}{2}w_{tt} - \frac{h}{2}w_{xx} + O[k^2] + O[h^2]. \tag{5.38}$$

方程(5.38)还不属于偏微分方程的通常形式,因为右端含有微分 w_{tt}.为了消去该微分,对方程(5.38)求一次时间微分得

$$w_{tt} = -w_{xt} - \frac{k}{2}w_{ttt} - \frac{h}{2}w_{txx} + O[k^2] + O[h^2]. \tag{5.39}$$

将(5.39)代入(5.38),便得

$$w_t + w_x = -\frac{k}{2}w_{xt} - \frac{h}{2}w_{xx} + O[k^2] + O[h^2]. \tag{5.40}$$

将(5.38)对空间微分得

$$w_{xt} = -w_{xx} - \frac{k}{2}w_{ttx} - \frac{h}{2}w_{xxx} + O[k^2] + O[h^2]. \tag{5.41}$$

将(5.41)代入(5.40)得

$$w_t + w_x = \frac{h}{2}(1-\sigma)w_{xx} + O[k^2] + O[h^2]. \tag{5.42}$$

方程(5.42)便是格式的一阶修正方程.与原偏微分方程($w_t + w_x = 0$)相比,它更接近格式.为了获得更高阶修正方程,可以在泰勒展开中保留更高阶项,按类似思路一步一步消去右端时间导数和混合导数.例如,一阶迎风格式的三阶修正方程为

$$\begin{aligned} w_t + w_x &= \frac{h}{2}(1-\sigma)w_{xx} + \frac{h^2}{6}(2\sigma-1)(1-\sigma)w_{xxx} \\ &\quad + \frac{h^3}{24}(1+6\sigma^2-6\sigma)(1-\sigma)w_{xxxx} \\ &\quad + O[h^4] + O[k^4]. \end{aligned}$$

特别注意的是,在推导修正方程时,从来没有使用精确解和原偏微分方程.这与推导当地截断误差截然不同.

因此,数值解 w_j^n 不是原偏微分方程的精确解,而是(无穷阶)修正方程的精确解.将修正方程与原偏微分方程相比,便可以看出误差所在.

修正方程可以用于分析稳定性.如果修正方程适定,则格式稳定,否则不稳定.

考虑欧拉中心格式

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\sigma}{2}(w_{j+1}^n - w_{j-1}^n).$$

其一阶修正方程为

$$w_t + w_x = -\frac{h}{2}w_{xt} + O[k^2] + O[h^2].$$

因耗散项 w_{xt} 的系数为负，所以修正方程为病态方程，从而原格式不稳定.

对于非线性问题，可以用修正方程来研究非线性不稳定.

5.3.2.4 混合初边值问题的误差分析

如果同时考虑初始条件与边界条件，则初始条件处理和边界条件处理均可影响精度. 考虑混合初边值问题

$$w_t + Aw_x = Bw + F, x \geqslant 0, t \geqslant 0;$$
$$w(x,0) = w_0(0), x \geqslant 0;$$
$$w^I(0,t) = Sw^{II}(0,t) + g(t).$$

相应的数值方法为

$$\sum_{\tau-1}^{-s} Q_\tau w_j^{n+\tau} = kF^n, \forall j \in j_{1,\infty};$$
$$w_j^\tau = w_\tau(jh), \forall j \in J_{-l+1,\infty}, \tau \in N_{-s+1,0};$$
$$w_\mu^{n+1} = \sum_{\tau-1}^{-s} S_\tau^{(\mu)} w_\mu^{n+\tau} + g_\mu^n, \forall \mu \in J_{-l+1,0}.$$

这里

$$Q_\tau = \sum_{\nu=-l}^{r} A_{\tau,\nu}E^\nu, Ew_j = w_{j+1}, S_\tau^{(\mu)} = \sum_{\nu=0}^{q} C_{\tau,\nu}^{(\mu)}E^\nu.$$

定义 5.19 令 $\sigma = \frac{k}{h} = O[1]$. 如果对于精确解 w，有

$$\left[1 - \sum_{\tau=1}^{-s} S_\tau^{(\mu)}\right]w + g_\mu = O[h^{p+1}], \mu \in J_{-l+1,0},$$

则边界条件的整体精度为 p 阶(当地精度为 $p+1$ 阶).

用类似办法也可以定义初试条件的精度.

在一定的稳定性假设下，可以证明，如果格式的精度(当地截断误差)为 p 阶，边界条件和初始条件的整体精度至少为 $p-1$ 解，则混合初边值问题的整体精度仍为 p 阶(Gustafsson, 1981). 这说明边界处理的精度可以比内点低一阶而不影响整体精度.

这里考察一个例子. 前面对于某定常问题的 Lax-Wendroff 格式推导的整体误差表达式为

$$e_j = c_1 + c_2\left(\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right)^j + dj. \tag{5.43}$$

假设内点格式定义在 $j = 1, 2, \ldots, J$. 先考虑下面的具有零阶精度的边界条件

$$w_0 = 0, w_{J+1} = w_J.$$

相应的误差方程为

$$e_0 = 0, e_{J+1} - e_J = e + o[h^2], e = w_x h.$$

由此确定误差表达式中的系数,最后误差表达式为

$$e_j = \frac{\sigma - 1}{2}\left(\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}\right)^J\left[\left(\frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}\right)^j - 1\right](e \quad d) + dj = O[h].$$

因此,整体精度为一阶.

下面使用一阶精度边界条件

$$w_0 = 0, w_{J+1} = 2w_J - w_{J-1}.$$

相应的误差方程为

$$e_0 = 0, e_{J+1} - 2e_J + e_{J-1} = e + o[h^3], e = w_{xx}h^2.$$

由此不难求得 $c_1 = c_2 = 0$. 从而

$$e_j = dj = O[h^2].$$

即整体误差为二阶.而我们仅使用了一阶精度的边界条件.

如果采用二阶或者二阶以上的边界条件,则发现仍有 $c_1 = c_2 = 0$,即整体误差仍为二阶.因此在内点格式精度一定的情况下,没有必要无限制地提高边界处理的精度.

5.4　守恒理论

5.4.1　守恒格式

考虑双曲型非线性守恒系统

$$w_t + f(w)_x = 0. \tag{5.44}$$

第四章中给出了守恒格式的正式定义和几种表现形式.半离散守恒格式的数值通量形式可以写为

$$\frac{\mathrm{d}w_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{f^{(*)}_{j+\frac{1}{2}} - f^{(*)}_{j-\frac{1}{2}}}{h}. \tag{5.45}$$

这里 $f^{(*)}_{j+1/2}$称为数值通量.对于 $l+r+1$ 点格式,数值通量包含周围 $l+r$ 个点的影响

$$f^{(*)}_{j+\frac{1}{2}} = f^{(*)}(w_{j-l+1}, \ldots, w_j, w_{j+1}, \ldots, w_{j+r}).$$

相容性条件为

$$f^{(*)}(w, \ldots, w, w, \ldots, w) = f(w).$$

全离散形式的守恒格式可以写成

$$w_j^{n+1} - w_j^n = -\sigma\left(f^{(*)}_{j+\frac{1}{2}} - f^{(*)}_{j-\frac{1}{2}}\right), \sigma = \frac{k}{h}, \tag{5.46}$$

这里

$$f^{(*)}_{j+\frac{1}{2}} = f^{(*)}((w^{n+1}_{j+\nu})_{-l+1\leqslant\nu\leqslant r}, (w^n_{j+\nu})_{-l+1\leqslant\nu\leqslant r}, \ldots; \sigma).$$

并且

$$f^{(*)}((w), (w), \ldots, (w); \sigma) = f(w).$$

5.4.2 守恒处理的重要性

考虑下面的伯格斯方程

$$w_t + f(w)_x = 0,\ f(w) = \frac{1}{2}w^2,$$

和初始条件(激波)

$$w = 1, x < 1;\ w = 0,\ x > 1.$$

对于上述问题,激波的移动速度为 $s' = \frac{1}{2}$.

用一阶迎风(守恒)格式计算上面的问题:

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \sigma(f_j^n - f_{j-1}^n) = w_j^n - \frac{\sigma}{2}[(w_j^n)^2 - (w_{j-1}^n)^2].$$

这里 $\sigma = k/h$.

设初始激波正好处于网格点 $j=J$ 和 $j=J+1$ 之间,即

$$w_j^0 = 1, j \leqslant J;\ w_j^0 = 0, j > J.$$

取 $\sigma=1$. 下面进行数值计算(精确数值解).

当 $n=1$,解为

$$w_j^1 |_{j<J} = 1;\ w_J^1 = 1;\ w_{J+1}^1 = 0.5;\ w_j^1 |_{j>J+1} = 0.$$

当 $n=2$,解为

$$w_j^1 |_{j<J} = 1;\ w_J^1 \approx 1;\ w_{J+1}^1 \approx \frac{7}{8};\ w_{J+2}^1 = \frac{1}{8};\ w_j^1 |_{j>J+2} = 0.$$

当 $n=2$,精确激波的位置正好处于 $j=J+1$ 和 $j=J+2$ 的中间. 上面的数值解也给出同样的结果. 进一步计算表面,数值激波总是与精确激波处于同一位置.

现在考虑伯格斯方程的非守恒迎风格式

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\sigma}{2}w_j^n(w_j^n - w_{j-1}^n).$$

取 $\sigma=1$. 下面进行数值计算 (精确数值解).

当 $n=1$,数值解为

$$w_j^1 |_{j<J} = 1;\ w_J^1 = 1;\ w_j^1 |_{j>J} = 0.$$

当 $n=2$,解仍然为

$$w_j^1 |_{j<J} = 1;\ w_J^1 = 1;\ w_j^1 |_{j>J} = 0.$$

因此,数值激波并不移动. 进一步计算表明,激波总是处于其初始位置. 而精确激波以一定的速度向右移动.

上面的计算表明,守恒格式能很好地捕获激波的位置,而非守恒格式给出错误的激波位置. 这清楚地表明采用守恒格式的重要性.

因守恒格式能正确地捕获激波位置,所以守恒方法也称激波捕获法.

5.4.3　守恒格式的其他形式

有时,守恒格式的形式可能与(5.45)或(5.46)有一定差别.我们可以证明它们其实与(5.45)和(5.46)等价.

最典型的例子是跳蛙格式

$$w_j^{n+1}=w_j^{n-1}-2\sigma\left(f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)}-f_{j-\frac{1}{2}}^{(*)}\right). \tag{5.47}$$

这里 $f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)}=\frac{1}{2}(f_j^n+f_{j+1}^n)$.它不具备(5.46)那样的形式.

考虑下面的初始条件

$$w_j^0=w_0(x_j),$$

$$w_j^1-w_j^0=-\sigma\left(f_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}-f_{j-\frac{1}{2}}^{(0)}\right).$$

这里 $f_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}$可以是与 $f(w)$相容的任一数值通量.这里简单选用

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}=\frac{1}{2}(f(w_j^0)+f(w_{j+1}^0)).$$

在第二个时间步,格式(5.47)变为

$$\begin{aligned}w_j^2-w_j^1&=w_j^0-w_j^1-2\sigma\left(f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)}-f_{j-\frac{1}{2}}^{(*)}\right)\\&=\sigma\left(f_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}-f_{j-\frac{1}{2}}^{(0)}\right)-2\sigma\left(f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)}-f_{j-\frac{1}{2}}^{(*)}\right)\\&=-\sigma\left(\overline{f}_{j+\frac{1}{2}}^{(*)}-\overline{f}_{j-\frac{1}{2}}^{(*)}\right).\end{aligned}$$

这里,新的数值通量为

$$\overline{f}_{j+\frac{1}{2}}^{(*)}=2f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)}-f_{j+\frac{1}{2}}^{(0)}.$$

进一步计算表明,对于任一 $n>2$,跳蛙格式也可以写成类似的守恒形式.

另一个比较典型的例子是紧致差分格式.考虑下面的半离散形式的紧致差分格式

$$\frac{\mathrm{d}w_j}{\mathrm{d}t}=F_j. \tag{5.48}$$

这里 $F=f_x(u)$由下面的隐式方程确定

$$a_{-1}F_{j-1}+a_0F_j+a_1F_{j+1}=b_{-1}f_{j-1}+b_0f_j+b_1f_{j+1}. \tag{5.49}$$

现在看是否能找到 $f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)}$,一方面满足

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)}=f^{(*)}(\ldots,w_{j-1},w_j,w_{j+1},\ldots),\ \forall_j;$$

$$f^{(*)}(\ldots,w,w,w,\ldots)=f(w).$$

另一方面与 F_j 存在下面的关系

$$F_j=-\frac{1}{h}\left(f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)}-f_{j-\frac{1}{2}}^{(*)}\right)\forall_j. \tag{5.50}$$

对(5.49)求逆,得

$$F_j = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l f_{j-l}. \tag{5.51}$$

这里 $a_l|_{|l|\to\infty}\to 0$. 如果不考虑边界(即边界在无限远处),则 a_l 与网格点 j 无关.

定义数值通量

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l f_{j-l}. \tag{5.52}$$

这里 b_l 与 j 无关.

将(5.52)代入(5.51)并且注意到

$$f_{j-\frac{1}{2}}^{(*)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l f_{j-l-1} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_{l-1} f_{j-l},$$

便得下面的关系式

$$-\frac{b_l - b_{l-1}}{h} = a_l \ \forall\, l. \tag{5.53}$$

另外,由相容性要求,有

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l = 1. \tag{5.54}$$

关系式(5.53)、(5.54)可以用来唯一地确定系数 b_l,使数值通量(5.52)满足相容性条件.因此,由(5.48)、(5.49)定义的格式也是守恒的.

5.4.4 守恒格式的特性

5.4.4.1 收　敛　性

守恒格式的主要特性在于它可以获得正确的弱解.考虑两层显式格式

$$w_j^{n+1} - w_j^n = -\frac{k}{h}\left(f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)} - f_{j-\frac{1}{2}}^{(*)}\right).$$

这里 $f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)} = f^{(*)}(w_{j-l+1}^n, w_{j-l+2}^n, \dots, w_{j+r}^n; \sigma)$.

Lax & Wendroff (1960) 证明了下面的定理:

定理 5.5　令 $h\to 0$ 和 $k\to 0$,如果守恒格式(5.46)的解几乎处处有界地收敛到某一函数 w^*,则 w^* 为偏微分方程(5.44)的弱解.

证明.将(5.46)乘以试验函数 ϕ,并对 x 积分和对所有时间步 n 求和.对所得方程的左端使用分部求和并利用关系式

$$\int \phi(x) f_{j+\frac{1}{2}}^{(*)} \mathrm{d}x = \int \phi(x) f^{(*)}\left(x + \frac{1}{2}h\right)\mathrm{d}x = \int \phi\left(x + \frac{1}{2}h\right) f^{(*)}(x)\mathrm{d}x,$$

便得到

$$\sum_n \int \frac{\phi(x, t-k) - \phi(x,t)}{k} w(x,t)\mathrm{d}x k - \int w(x,0)\phi(x,0)\mathrm{d}x$$

$$= -\sum_n \int \frac{\phi\left(x + \frac{1}{2}h\right) - \phi\left(x - \frac{1}{2}h\right)}{h} f \mathrm{d}x.$$

在收敛假设下,由上述方程得

$$\iint w^* \phi_t \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint f(w^*)\phi_x \mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int w(x,0)\phi(x,0)\mathrm{d}x.$$

这便是弱解的数学定义,因此 w^* 为弱解. □

对于一般守恒格式,上述定理也成立.

5.4.4.2 相 容 性

我们来证明下面的定理:

定理 5.6 设数值通量 $f^{(*)}_{j+\frac{1}{2}} = f^{(*)}((w^{n-\tau}_{j+\nu})_{1\leqslant\tau\leqslant s,-l+1\leqslant\nu\leqslant r};\sigma)$ 可以对其自变量进行微分,并且与精确通量函数相容,即 $f^{(*)}((w);\sigma) = f(w)$,则守恒格式必定与原偏微分方程 $w_t + f(w)_x = 0$ 相容.

证明. 令 $f^{(*)}_p$ 为数值通量对第 p 个自变量的微分. 由可微假设,有

$$f^{(*)}_{j+\frac{1}{2}} = f^{(*)}((w_j);\sigma) + \sum_{p=1}^{l+r} f^{(*)}_p((w_j);\sigma)(w_{j+p-l} - w_j) + O[h^2],$$

$$f^{(*)}_{j-\frac{1}{2}} = f^{(*)}((w_j);\sigma) + \sum_{p=1}^{l+r} f^{(*)}_p((w_j);\sigma)(w_{j+p-l-1} - w_j) + O[h^2].$$

由数值通量的相容性假设,有

$$\begin{aligned}\frac{f^{(*)}_{j+\frac{1}{2}} - f^{(*)}_{j-\frac{1}{2}}}{h} &= \sum_{p=1}^{l+r} f^{(*)}_p((w_j);\sigma)\frac{w_{j+p-l} - w_{j+p-l-1}}{h} + O[h] \\ &= \sum_{p=1}^{l+r} f^{(*)}_p((w_j);\sigma)w_x + O[h] \\ &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}w}w_x + O[h] \\ &= f_x + O[h].\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{(*)}_{j+\frac{1}{2}} - f^{(*)}_{j-\frac{1}{2}}}{h} = f(w)_x.$$

从而守恒格式与原微分方程相容.

5.4.4.3 捕获间断的能力

前面已经证明了,如果守恒格式的解收敛,则必然收敛到偏微分方程的弱解. 但下面两个问题还不清楚:

1) 对于有限尺寸的网格,守恒格式的解有什么特性?

2) 如果某格式的解能收敛到偏微分方程的弱解,此格式一定守恒吗?

因为在实际应用中我们用的是有限两格尺寸,所以上面第一个问题具有重要实际意义. 第二个问题实际在问:是否可以使用非守恒格式?

Wu(1999)的分析回答了上面第一个问题.他考虑一个向右以速度 s 移动的激波.激波的左右状态分别为 w_l 和 w_r.激波速度与左右状态通过下面的 Rungine-Hugoniot 条件联系

$$f(w_r) - f(w_l) = s(w_r - w_l).$$

Rankine-Hugoniot 条件即为弱解或守恒性的宏观表现.

下面只考虑一种理想化的数值激波,看它的移动速度是否等于精确激波的移动速度.理想化的激波没有数值振荡,在所考察的时刻严格分辨在两个相邻网格点上.设在所考察的时刻激波分辨在 j_s 和 j_s+1 两个网格点上,则有 $w_{j\leqslant j_s}=w_l, w_{j\geqslant j_s+1}=w_r$.进一步假设在初始时刻激波位于 $j=1$ 和 $j=2$ 之间.现在来估计数值激波移动到 J 和 $J+1$ 之间所需要的时间.

为此将守恒格式写成下面的形式

$$w_j^{n+1} - w_n^n = -\frac{k}{h}\left(F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n\right).$$

这里,数值通量 F^n 与 f 相容.将格式对所有网格点和对 K 个时间步求和,得

$$\sum_{j=1}^{J}(w_j^{n+K} - w_j^n) = -\frac{k}{h}\sum_{\sigma=1}^{K}\left(F_{\frac{1}{2}}^{n+\sigma} - F_{J+\frac{1}{2}}^{n+\sigma}\right). \tag{5.55}$$

假设数值激波是理想化激波,进一步令 J 和 K 足够大,我们有

$$\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} w_j^{n+K} = w_l, \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} w_j^n = w_r;$$

$$\frac{1}{K}\sum_{\sigma=1}^{K} F_{\frac{1}{2}}^{n+\sigma} = f(w_l), \frac{1}{K}\sum_{\sigma=1}^{K} F_{J+\frac{1}{2}}^{n+\sigma} = f(w_r).$$

将上述关系式代入(5.55)便得

$$f(w_r) - f(w_l) = s'(w_r - w_l). \tag{5.56}$$

这里 $s'=\dfrac{Jh}{Kk}$ 正好是数值激波的移动速度.与 Rankine-Hugoniot 条件相比较发现 $s'=s$.因此数值激波的移动速度正好等于精确激波的移动速度.

一般情况下,因耗散抹平效应、数值振荡、激波并不处于两个网格点之间等原因,数值激波不是理想的.此时可以引入偏离理想化激波的分辨误差.一般分辨误差近似等于网格尺寸,因此上述结论改为:数值激波的位置基本等于精确激波的位置,误差一般接近网格间距.

上述分析没有考虑多个激波相互干扰的情况.

因此对于有限尺寸的网格,在允许一个网格距离误差的情况下,由守恒格式算得的数值激波的位置(速度)等于精确激波的位置(速度).

为了回答第二个问题,这里只考虑一个加密网格例子.考虑几何加密网格:对于 $j=-1,-2,\ldots$,网格尺寸满足 $h_j=h_0r^{-j}$;对于 $j=1,2,\ldots$,网格尺寸满足 $h_j=h_0r^j$,这里 $r<1$ 并且 $r\approx1$.考虑守恒格式.

$$w_j^{n+1} - w_j^n = -\frac{k}{h_j}\left(F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n\right). \tag{5.57}$$

现在给(5.57)添加人工黏性.如果要求守恒,带人工黏性的格式可以写成

$$w_j^{n+1}-w_j^n=-\frac{k}{h_j}\left(F_{j+\frac{1}{2}}^n-F_{j-\frac{1}{2}}^n\right)+\frac{1}{2}\varepsilon\frac{k}{h_j}(w_{j+1}^n-2w_j^n+w_{j-1}^n). \tag{5.58}$$

这里考虑非守恒形式

$$w_j^{n+1}-w_j^n=-\frac{k}{h_j}\left(F_{j+\frac{1}{2}}^n-F_{j-\frac{1}{2}}^n\right)+\frac{1}{2}\varepsilon(w_{j+1}^n-2w_j^n+w_{j-1}^n), \tag{5.59}$$

我们证明,格式(5.59)的解如果收敛,则收敛到弱解.采用证明定理5.5类似的思路,发现格式(5.59)的收敛解 w^* 满足

$$\iint w^*\phi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint f(w^*)\phi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int w(x,0)\phi(x,0)\mathrm{d}x+d(h_0)\mid_{h_0\to 0}.$$

这里 $d(h_0)$ 为 h_0 的量级,因而 $d(h_0)|_{h_0\to 0}=0$.所以 w^* 确实是偏微分方程的弱解.

因此,如果某格式的收敛解为偏微分方程的弱解,该格式不一定守恒.这便回答了上面第二个问题.

那么是否可以用具有这种特性的非守恒格式呢?数值计算表明,对于有限尺寸的网格,格式(5.59)算出的激波与精确激波相比有很大误差.为此,我们有下面的综合结论:

守恒格式和某些非守恒格式的收敛解为偏微分方程的弱解.对于有限尺寸的网格(数值解还未收敛),用守恒格式计算的激波位置接近精确激波的位置,但收敛解等于弱解的非守恒格式计算的激波可能严重偏离精确激波的位置.

因此不能简单从能否收敛到弱解来构造计算激波等间断的格式,还应考虑有限网格尺寸时数值激波的宏观效应.从这点意义上讲,使用守恒形式的格式非常重要.最近文献中研究使用非守恒格式计算激波的可能性,这些文献中的研究结论不能随意拓宽,必须谨慎对待.

5.5 定　常　解

5.5.1 收敛到定常解的速度

考虑运输方程

$$w_t+w_x=0,0<x<1,t>0. \tag{5.60}$$

用下面的一般两层三点格式对上述方程进行离散:

$$a_1w_{j-1}^{n+1}+b_1w_j^{n+1}+c_1w_{j+1}^{n+1}=a_0w_{j-1}^n+b_0w_j^n+c_0w_{j+1}^n,1\leqslant j\leqslant J. \tag{5.61}$$

初始条件为

$$w_j^0=f_j,1\leqslant j\leqslant J. \tag{5.62}$$

边界条件为

$$w_0^n=1,w_{J+1}^n=w_J^n. \tag{5.63}$$

通过上面的时间相关格式进行迭代,以收敛到定常解.

定义两个时间步之间解的差别

$$\varepsilon_j^n=w_j^{n+1}-w_j^n. \tag{5.64}$$

定义 5.20　如果关系式

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_j^n = 0, 1 \leqslant j \leqslant J$$

满足,则称混合初边值问题能收敛到定常解.

实际计算中,一般不能考虑迭代无穷多次,而是考虑 l_2 残值

$$R_2^n = \sqrt{\frac{\sum_j h_j\left(\frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{k_j}\right)^2}{\sum_j h_j}}.$$

当在时刻 $n = N$ 残值满足 $R_2^{n=N} < R_{\min}R_2^{n=0}$ 时,便认为收敛了.取 $w_j = w_j^N$ 作为收敛解.对于工程问题,取 $R_{\min} = 10^{-5}$.对于机理研究或方法研究,可取 $R_{\min} = 10^{-8}$.如果方法使用不当,可能出现不收敛.如果 N 越小,则收敛越快.用计算机进行计算时,因机器误差的存在,使得残值不能无限减小.残值降到 $R_2^n = R_{\min}$后便不能再减小(可能在 $R_{\min}$附近抖动).最小残值 $R_{\min}$也称机器零.如果采用单精度计算,$R_{\min} \approx 10^{-8}$;如果采用双精度计算,$R_{\min} \approx 10^{-16}$.

对于给定的线性差分格式,可以预计收敛到某残值 R 所需要的迭代次数 N_R.称 $\frac{1}{N_R}$ 为收敛速度.

为了估计收敛速度,将(5.64)代入(5.61)和(5.63),得

$$a_1\varepsilon_{j-1}^{n+1} + b_1\varepsilon_j^{n+1} + c_1\varepsilon_{j+1}^{n+1} = a_0\varepsilon_{j-1}^n + b_0\varepsilon_j^n + c_0\varepsilon_{j+1}^n, 1 \leqslant j \leqslant J; \tag{5.65}$$

$$\varepsilon_0^n = 0, \varepsilon_{J+1}^n = \varepsilon_J^n. \tag{5.66}$$

将

$$\varepsilon_j^n = z^n\phi_j, z \in C,$$

代入(5.65),(5.66),便得下面的特征值问题

$$zM_1\Phi = M_0\Phi. \tag{5.67}$$

这里

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{J+1} \end{pmatrix}, M_i = \begin{pmatrix} i & & & & & \\ a_i & b_i & c_i & & & \\ & a_i & b_i & c_i & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & a_i & b_i & c_i \\ & & & & a_i & b_i & c_i \\ & & & & & -i & i \end{pmatrix}, i = 0, 1.$$

特征值 $\{z_0, z_1, z_2, \ldots, z_J, z_{J+1}\}$ 由下面的关系式求得

$$\det(zM_1 - M_0) = 0.$$

收敛速度与最大特征值 $\rho_z = \max(|z_\sigma|)$ 相关联(Parseval 关系式)

$$R_2^n \leqslant \rho_z^n.$$ [①] (5.68)

因此,

1) 如果 $\rho_z < 1$,则当 $n \to \infty$,残值将趋于(机器)零,意味着收敛;

2) 如果 $\rho_z = 1$,则不收敛;

3) 如果 $\rho_z > 1$,则发散,即误差很快被放大,直至出现无限大.

由关系式(5.68)知,收敛到 R 所需的迭代次数为

$$N_R \leqslant \frac{\ln R}{\ln \rho_z}.$$

上面的公式只是一种近似估计.因为尽管是最大特征值决定收敛速度,但可能在收敛过程中,解并不等于对应最大特征值的特征矢量.因此其他特征值也起一些作用.

一般情况下需要采用数值方法才能求上述特征问题,而且特征值一般为复数,需要用复数程序求.

如果格式的系数为常系数,则可以用解析方法求特征值.将 $\varepsilon_j^n = z^n \kappa^j$ 代入格式(5.65),得下面特征方程

$$z(a_1 + b_1\kappa + c_1\kappa^2) = a_0 + b_0\kappa + c_0\kappa^2. \tag{5.69}$$

此时特征矢量可以写成

$$\phi_j = \kappa_1^j c_1 + \kappa_2^j c_2. \tag{5.70}$$

这里 κ_1 和 κ_2 为特征方程的两个根.

将(5.70)代入边界条件(5.66)得

$$P(z)(c_1, c_2)^t = 0, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_1 & \kappa_2 \end{pmatrix}. \tag{5.71}$$

因此,$\det P(z) = 0$ 便决定了所有特征值 $z = z_\sigma$.

特征值问题(5.67)和(5.71)在常系数情况下是等价的.它们有各自的优缺点:

1) 系统(5.67)可以用来分析变系数问题的收敛速度,对小的 J 十分容易求解.但只适合定量分析,对于大 J,求解很费时间而且精度低.

2) 系统(5.71)特别适合尤其是 J 特别大时的定性分析.但它限于常系数问题的分析而且解析求法一般很困难($\det P(z)$一般为复杂的非线性函数).

用上述方法可以研究各种内外边界处理对收敛速度的影响(Gustafsson,1982,Wu,1996(b)).

上面只考虑了简单的三点格式和简单边界条件.对于一般情况可以用类似办法求特征值.

下面的定理很有用(Gustafsson 1982):

---

① 令 $\varepsilon^{n+1} = G\varepsilon^n$ 并假设 G 可以对角化:$G = S\Lambda S^{-1}$.于是 $\varepsilon^n = S\Lambda^n S^{-1}\varepsilon^0$ 从而有

$$\|\varepsilon^n\| \leqslant \|G^n\| \|\varepsilon^0\| \leqslant \|S\| \|S^{-1}\| \|\Lambda^n\| \|\varepsilon^0\|$$

因此

$$\left(\frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^0}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant (\|S\| \|S^{-1}\|)^{\frac{1}{n}} \rho(G)$$

由此不难得到(5.68).如果 G 不可以对角化,则可以令 $G = SJS^{-1}$,这里 J 为 G 的乔当矩阵.余下的推导完全与前面类似.

定理 5.7　如果内点格式为严格耗散格式,左右边界之间的网格点数量足够多(从而相互之间的干扰可以忽略),并且左右边界的处理各自 GKS 稳定,那么混合初边值问题能收敛.

5.5.2　定常解的唯一性

定常问题一般是通过求非定常问题获得的.此时所给的初始条件往往带有一定的任意性.这种任意性不能给收敛结果带来差别。这就要求内点格式加边界条件对于收敛解是唯一的.Wu(1996a)针对一般含有内外边界的问题构造了系统的定常解的唯一性分析方法.下面简单介绍一下唯一性的分析方法.

考虑前面分析收敛性的简单模型(5.60)至(5.63).假设所考虑的是常系数问题.用前面类似的办法获得 $P(z)$(见式(5.71)).显然,只有取 $z=1$,前面的特征值问题才对应定常解所满足的方程.因此,定常解唯一的充分必要条件为:

$$\det P(1)\neq 0 \quad (\text{唯一性条件}). \tag{5.72}$$

原则上可以用条件(5.72)来检验解的唯一性.但对于某些特殊情况,Wu 还推导了一些简化唯一性条件.

定理 5.8　对于三点格式,如果内点格式满足 von Neumann 稳定性条件,并且左右边界的处理各自 GKS 稳定,则混合初边值问题的定常解唯一.

定理 5.9　对于多点耗散格式,如果内点格式满足 von Neumann 稳定性条件,左右边界的处理各自 GKS 稳定,并且左右边界之间的网格点数量足够多(从而相互之间的干扰可以忽略),则混合初边值问题的定常解唯一.

5.6　分区计算的理论分析

分区计算的关键在于它存在内边界.一方面,它像一般边界一样对稳定性、解的唯一性与收敛性有影响.另一方面因其存在于区域内部,所以对守恒性也有影响.这里综合 Wu(1996a,1996b,1999),Wu&Zou(2000)等文献的研究结果,做一简单介绍.

考虑下面的数学模型:

$$w_t+f(w)_x=0,\quad t\in\mathbf{R}^+,-A<x<B \quad (\text{双曲系统}); \tag{5.73}$$

$$w(x,0)=w_0(x),\quad -A<x<B \quad (\text{初始条件}); \tag{5.74}$$

$$w(-A,t)=g(t),\quad t\in\mathbf{R}^+ \quad (\text{边界条件}). \tag{5.75}$$

这里,w 是守恒变量,$f(w)$是通量函数.不失一般性,已假定了 $C=\mathrm{d}f(w)/\mathrm{d}w>0$.为了求解上述初边值问题,将区域分解成两个子域:$D_u=(-A,b)$,$D_v=(-a,B)$.这里,$-a\leqslant b$.如果 $-a=b$,则为对接网格;若 $-a<b$,则为覆盖网格.在区域 D_u 和 D_v 中,网格大小分别记为 h_u 和 h_v.在左右两区域中,差分格式(限三点格式)可分别写为

$$\begin{cases}\Delta u_j^n=-\sigma_u(f_{j+1/2}^n-f_{j-1/2}^n),j\leqslant -1;\\ \Delta v_j^n=-\sigma_v(g_{j+1/2}^n-g_{j-1/2}^n),j\geqslant 1.\end{cases} \tag{5.76}$$

这里 $\sigma_u=k/h_u,\sigma_v=k/h_v,k$ 为时间步长,f 与 g 为左右子区中相应于函数 $f(w)$ 的数值通量.

子域内边界处 $j=0$ 值 u_0^{n+1} 和 v_0^{n+1} 由耦合条件定义.耦合条件可以写成下面的一般形式

$$u_0^{n+1}=I(v),v_0^{n+1}=I(u)\ (\text{一般插值}); \tag{5.77}$$

或

$$f_{\frac{1}{2}}^n=I(g),g_{-\frac{1}{2}}^n=I(f)\ (\text{通量插值}). \tag{5.78}$$

5.6.1 分析方法

耦合条件的守恒性分析　对于守恒系统(5.73),定义 $I(t)=\int_{-\infty}^{\infty}w(x,t)\mathrm{d}x$,则有 $\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=0$.因此,$I$ 为守恒量.对于数值方法,同样定义 $S^n=\sum_{j=-\infty}^{\infty}hw_j^n=I(nk)+O(h^p)$.这里,$k$ 和 h 分别为时间和空间步长.对于分区算法,S^n 可以分裂成属于每个子区和覆盖域的三部分,即:$S^n=S_{x<a}^n+S_{x>b}^n+S^n_{-a<x<b}$.

定理 5.10 (**Berger,1987**)　如果 $p>0$ 并且对任何 n 都有 $S^{n+1}=S^n$,则分区算子(5.76)的解在网格收敛时收敛到系统(5.73)至(5.75)的弱解.

如果对于守恒格式,有 $S^{n+1}=S^n,\forall n\geqslant0$,则称耦合条件是守恒的.

不难证明,对于覆盖分区算法,一般插值是不守恒的,而通量插值是守恒的.

差分格式的正规模态分析(normal mode analysis)　为了进行理论分析,假定系统(5.73)及相应的数值方法都是线性的.将差分格式及初边值条件对时间和空间分别进行傅里叶变换和拉普拉斯变换后,解(正规模态)可以写成

$$u_j^n=z^n\kappa_u^ju_0,\kappa_u\in\mathbf{C};v_j^n=z^n\kappa_v^jv_0,\kappa_v\in\mathbf{C}.$$

这里,$z\in C$,κ_u 和 κ_v 分别为三点格式(5.76)特征方程的根.将正规模态解代入格式(5.76),左右两端分别除以 $z^n,\kappa_u^ju_0$ 或 $\kappa_v^jv_0$ 后得如下特征方程

$$z-1=-\sigma_u\hat{f}(z,\kappa_u)(\kappa_u-1),z-1=-\sigma_v\hat{g}(z,\kappa_v)(\kappa_v-1). \tag{5.79}$$

对每个 z,特征方程(5.76)各有两个根(多点格式的根更多),即 $\kappa_{u_1},\kappa_{u_2}$ 和 $\kappa_{v_1},\kappa_{v_2}$.不失一般性,可令 $|\kappa_{u_1}|\leqslant|\kappa_{u_2}|,|\kappa_{v_1}|\leqslant|\kappa_{v_2}|$.因而通解的一般形式是

$$u_j^n=z^n\kappa_{u_1}^ju_1+z^n\kappa_{u_2}^ju_2,\quad v_j^n=z^n\kappa_{v_1}^jv_1+z^n\kappa_{v_2}^jv_2. \tag{5.80}$$

其中 u_1,u_2,v_1 和 v_2 须由边界条件和耦合条件确定.

由引理 5.4 和式(5.79),立即得到下面的引理

引理 5.5　设差分格式(5.79)满足冯·牛曼(von Neumann)条件即 Cauchy 稳定.则特征方程的根具有如下性质:

1) 如果 $|z|>1$,则有 $|\kappa_{u_1}|<1,|\kappa_{u_2}|>1;|\kappa_{v_1}|<1,|\kappa_{v_2}|>1$;

2) 如果格式具有 Kreiss 耗散,则对 $|z|=1,z\neq1$,有 $|\kappa_{u_1}|<1,|\kappa_{u_2}|>1,|\kappa_{v_1}|<1,|\kappa_{v_2}|>1$;

3) 如果 $z=1$，则有 $\kappa_{u_1}=1$，$|\kappa_{u_2}|>1$，$\kappa_{v_1}=1$，$|\kappa_{v_2}|>1$；并且有 $\hat{f}(1,\kappa_{u_2})=0$，$g(1,\kappa_{v_1})\neq 0$.

稳定性　分区算子的稳定是由格式(5.76)本身的稳定性、左右边界处理的稳定性和子区交接面处理的稳定性共同决定的.假设格式本身和外边界处理均稳定，因此只考虑交接面的稳定性问题.这时可假设外边界不存在而令 $A,B\to\infty$.

用 GKS(Gustafsson, Kreiss, & Sundstrom, 1972)稳定性理论来分析耦合条件的稳定性.令

$$u_j^n=u_0z^n\kappa_u^j,\ j\leqslant 0,\ \kappa_u=\kappa_{u_2};\ v_j^n=v_0z^n\kappa_v^j,\ j\geqslant 0,\ \kappa_v=\kappa_{v_1}. \tag{5.81}$$

将(5.81)代入耦合条件，得到 $M(z,\kappa_u,\kappa_v)(u_0,v_0)^t=0$，$M\in\mathbf{C}^{2\times 2}$.

定理 5.11　(GKS,1972)　如果 $\det M(z)\neq 0\ \forall\ |z|\geqslant 1$，则交接面处理是(GKS-)稳定的.

定理 5.12　(Wu,1996a)　如果 $\det M(z)\neq 0\ \forall\ |z|\geqslant 1$，$z\neq 1$ 但 $\det M(1)=0$ 并且有

$$|u_0|<K_u\frac{|k_u-1|}{|z-1|},\ |v_0|<K_v\frac{|k_v-1|}{|z-1|},\ z\to 1, \tag{5.82}$$

则交接面处理是弱稳定的.这里 K_u,K_v 为正常数.

解的唯一性　这里只讨论定常解的唯一性.这时，$z=1$.根据引理 5.5，基本解的一般形式是 $u_j=u_1+\kappa_{u_2}^j u_2$，$v_j=v_1+\kappa_{v_2}^j v_2$.将其代入外边界条件和耦合条件，得方程：$Q(u_1,u_2,v_1,v_2)^t=0$，$Q\in\mathbf{R}^{4\times 4}$.

引理 5.6　(Wu,1996a)　分区算子的定常解唯一的充要条件是 $\det Q\neq 0$.

定理 5.13　(Wu,1996a)　假设外边界处理是 GKS 稳定的.如果内边界处理也是 GKS 稳定的，那么分区算子的定常解是唯一的.

收敛性　这里讨论收敛到定常解的速度，将基本解的一般形式(5.80)代入外边界条件和耦合条件，得方程 $P(z)(u_1,u_2,v_1,v_2)^t=0$，$P\in\mathbf{C}^{4\times 4}$.

定理 5.14　如果 $\det P(z)\neq 0\ \forall\ |z|\geqslant 1$，则当 $n\to\infty$ 时，分区算子的解能收敛到定常解.

定理 5.15　(Wu,1996b)　设每个子区的网格点足够多而且差分格式具有 Kreiss 耗散.如果交接面处理具有 GKS 稳定性，则当 $n\to\infty$ 时，分区算子的解能收敛到定常解.

5.6.2　覆盖分区两类处理的稳定性分析

由前面的分析理论知道，稳定性决定了其他特性如解的唯一性和收敛性.因此只需要研究稳定性问题.而覆盖分区算法的稳定性具有代表性.

首先考虑一般插值的稳定性分析.先将耦合条件写成

$$u_0^{n+1}=\sum_{\sigma=-1}^{s_1}\sum_{i=0}^{l_u-1}\alpha_i^{(\sigma)}v_{p+i}^{n-\sigma},\qquad v_0^{n+1}=\sum_{\sigma=-1}^{s_2}\sum_{i=0}^{l_v-1}\beta_i^{(\sigma)}u_{q+i}^{n-\sigma}. \tag{5.83}$$

这里 $\alpha_i^{(\sigma)},\beta_i^{(\sigma)}$ 为插值系数，l_u,l_v 为插值宽度.显然，插值系数必需满足如下的相容性条

件

$$\sum_{\sigma=-1}^{s_1}\sum_{i=0}^{l_u-1}\alpha_i^{(\sigma)}=1,\qquad \sum_{\sigma=-1}^{s_2}\sum_{i=0}^{l_v-1}\beta_i^{(\sigma)}=1.$$

如果令 $\alpha_i^{(-1)}=0$ 和 $\beta_i^{(-1)}=0$ 那么耦合条件为时间滞后耦合条件.

定理 5.16　考虑三点两层格式.并且假设所有的插值系数不为负.如果格式具有 Kreiss 耗散,那么以(5.83)作为耦合条件的分区处理是 GKS 稳定的.

证明.对(5.83),求得

$$\det M(z)=z^2-\sum_{\sigma=-1}^{s_1}\sum_{i=0}^{l_u-1}\alpha_i^{(\sigma)}\kappa_{v_1}^{p+i}z^{-\sigma}\sum_{\sigma=-1}^{s_2}\sum_{i=0}^{l_v-1}\beta_i^{(\sigma)}\kappa_{u_2}^{-q+i}z^{-\sigma}.$$

首先考虑 $z=1$,由引理 5.5 知 $\kappa_{v_1}=1,|\kappa_{u_2}|>1$.于是

$$\sum_{\sigma=-1}^{s_1}\sum_{i=0}^{l_u-1}\kappa_{v_1}\alpha_i^{(\sigma)}=1,\ \left|\sum_{\sigma=-1}^{s_2}\sum_{i=0}^{l_v-1}\beta_i^{(\sigma)}\kappa_{u_2}^{-q+i}z^{-\sigma}\right|<1.$$

因此

$$\det M(1)=1-\sum_{\sigma=-1}^{s_2}\sum_{i=0}^{l_v-1}\beta_i^{(\sigma)}\kappa_{u_2}^{q+i}\neq 0.$$

下面考虑 $|z|\geqslant 1,z\neq 1$.由插值系数为正得

$$\left|\sum_{\sigma=-1}^{s_1}\sum_{i=0}^{l_u-1}\alpha_i^{(\sigma)}\kappa_{v_1}^{p+i}z^{-\sigma}\sum_{\sigma=-1}^{s_2}\sum_{i=0}^{l_v-1}\beta_i^{(\sigma)}\kappa_{u_2}^{-q+i}z^{-\sigma}\right|$$
$$\leqslant\sum_{\sigma=-1}^{s_1}\sum_{i=0}^{l_u-1}\alpha_i^{(\sigma)}|\kappa_{v_1}^{p+i}||z^{-\sigma}|\sum_{\sigma=-1}^{s_2}\sum_{i=0}^{l_v-1}\beta_i^{(\sigma)}|\kappa_{u_2}^{-q+i}||z^{-\sigma}|.$$

由引理 5.5 知 $|\kappa_{v_1}|<1,|\kappa_{u_2}|>1$,所以

$$\left|\sum_{\sigma=-1}^{s_1}\sum_{i=0}^{l_u-1}\alpha_i^{(\sigma)}\kappa_{v_1}^{p+i}z^{-\sigma}\sum_{\sigma=-1}^{s_2}\sum_{i=0}^{l_v-1}\beta_i^{(\sigma)}\kappa_{u_2}^{-q+i}z^{-\sigma}\right|<\sum_{\sigma=-1}^{s_1}\sum_{i=0}^{l_u-1}\alpha_i^{(\sigma)}\sum_{\sigma=-1}^{s_2}\sum_{i=0}^{l_v-1}\beta_i^{(\sigma)}=1.$$

因此必然有 $\det M(z)\neq 0$.

于是对所有的 $|z|\geqslant 1$,有 $\det M(z)\neq 0$.因此所考虑的问题是 GKS 稳定的.　□

下面考虑通量插值条件

$$f_{\frac{1}{2}}^{n+1}=\alpha g_{p-\frac{1}{2}}^{n-q}+(1-\alpha)g_{p+\frac{1}{2}}^{n},\ g_{-\frac{1}{2}}^{n+1}=\beta f_{-q-\frac{1}{2}}^{n-\sigma}+(1-\beta)f_{-q+\frac{1}{2}}^{n-\sigma}\qquad(5.84)$$

的稳定性.

定理 5.17　考虑三点两层格式.并且假设所有的插值系数不为负.如果格式具有 Kreiss 耗散,那么以(5.84)作为耦合条件的分区处理是弱稳定的.

证明.对(5.84),求得

$$\det M(z)=\hat{f}(z,\kappa_{u_2})g(z,\kappa_{v_1})|z^2\kappa_{v_1}-z^{-2\sigma}\kappa_{u_2}^{-q}\kappa_{v_1}^{p}[\alpha+(1-\alpha)\kappa_{v_1}][\beta+(1-\beta)\kappa_{u_2}]|.$$

由引理 5.5 知 $\kappa_{v_1}=1$ 并且有 $\hat{f}(1,\kappa_{u_2})=0$,因此 $\det M(1)=0$.于是问题 GKS 不稳定.下面证明是弱稳定的.

首先证明对所有 $|z|\geqslant 1,z\neq 1$,有 $\det M(z)\neq 0$.由引理 5.5 知,对于 Kreiss 耗散格式,有 $|\kappa_{u_2}|>1,|\kappa_{v_1}|<1$.因此

$$z^2\kappa_{v_1}-z^{-2\sigma}\kappa_{u_2}^{-q}\kappa_{v_1}^{p}[\alpha+(1-\alpha)\kappa_{v_1}][\beta+(1-\beta)\kappa_{u_2}]\neq 0.$$

并且有 $\hat{f}(z,\kappa_{u_2})\neq 0, g(z,\kappa_{v_1})\neq 0\ \forall\ |z|\geqslant 1, z\neq 1$. 因此对所有 $|z|\geqslant 1, z\neq 1$, 有 $\det M(z)\neq 0$.

因此只需验证对 $z\to 1$,弱稳定性条件满足. 为此,必须在条件(5.84)中添加扰动项并写成

$$f_{\frac{1}{2}}^{n+1}=\alpha g_{p-\frac{1}{2}}^{n-\sigma}+(1-\alpha)g_{p+\frac{1}{2}}^{n-\sigma}+r_1, g_{-\frac{1}{2}}^{n+1}=\beta f_{-q-\frac{1}{2}}^{n-\sigma}+(1-\beta)f_{-q+\frac{1}{2}}^{n-\sigma}+r_2.$$

这里 r_1 和 r_2 用以模拟机器误差等扰动. 将正规模态解代入上式得

$$M(z)\begin{pmatrix}\tilde{u}_1\\ \hat{v}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix}.$$

这里

$$M(z)=\begin{pmatrix}-z\hat{f} & z^{-\sigma}\kappa_{v_1}^{p}[\alpha+(1-\alpha)\kappa_{v_1}]g\\ z^{-\sigma}\kappa_{u_2}^{-q}[\beta+(1-\beta)\kappa_{u_2}]\hat{f} & -z\kappa_{v_1}g\end{pmatrix}.$$

于是

$$\det M(z)=\hat{f}(z,\kappa_{u_2})g(z,\kappa_{v_1})\{z^2\kappa_{v_1}-z^{-2\sigma}\kappa_{u_2}^{-q}\kappa_{v_1}^{p}[\alpha+(1-\alpha)\kappa_{v_1}][\beta+(1-\beta)\kappa_{u_2}]\}.$$

现在需要证明 $\hat{u}_1$ 和 $\hat{v}_1$ 满足弱稳定条件(5.82). 对于 $|z|\geqslant 1, z\neq 1$,求得

$$\hat{u}_1=-\frac{g}{\det M}[z\kappa_{v_1}r_1+z^{-\sigma}\kappa_{v_1}^{p}(\alpha+(1-\alpha)\kappa_{v_1})r_2],$$

$$\hat{v}_1=-\frac{\hat{f}}{\det M}[zr_2+z^{-\sigma}\kappa_{u_2}^{-q}(\beta+(1-\beta)\kappa_{u_2})r_1].$$

将 $\det M(z)$ 的表达式代入上式得 $|\hat{u}_1|\leqslant K_1|\hat{f}|, |\hat{v}_1|\leqslant K_2/|g|$. 再由特征方程(5.79)便得

$$|\hat{u}_1|\leqslant K\frac{||\kappa_{u_2}|-1|}{||z|-1|}, |\hat{v}_1|\leqslant K\frac{||\kappa_{v_1}|-1|}{||z|-1|}.$$

于是条件(5.82)满足,因此证明了弱稳定性. □

于是,针对 Kreiss 耗散格式,正系数一般插值耦合条件(包括系数总是为正的重构造插值)保证 GKS 稳定,从而保证收敛性与解的唯一性. 但能保证守恒的通量插值只弱稳定,而且解不唯一并且不能保证线性收敛.

由进一步分析或数值经验可以得出下面的结论.

1) 由于通量插值 GKS 不稳定、解不唯一而且线性不收敛,所以很难使用. 对于非定常问题困难不是特别大. 对于定常问题,使用的初始条件在分区边界必须连续、必须使用均匀时间步(不能使用当地时间步长)、不能使用时间滞后处理(从而限制了隐式格式的使用). 对于定常问题,比较可行的办法是,以某种方式交替使用一般插值和通量插值.

2) 对于一般插值,如果不能保证插值系数为正,那么可以通过增加覆盖长度来增加稳定性和收敛性(只对耗散格式如此). 对于非耗散格式,可以证明稳定性与覆盖区长度(以网格点数计)的齐偶性有关(类似于 5.6.4 节中的解的唯一性).

5.6.3 趣味理论分析一:覆盖分区计算守恒问题

覆盖分区计算在计算流体力学中有重要作用,涉及一些特殊理论问题(稳定、收敛、唯一、守恒).但往往对守恒性问题存在一些误解,主要有两个方面:

1) 认为内边界处加权插值或随便的数值通量插值是守恒的.

2) 当发现分区内边界处解与单区计算解有误差时,便认为是守恒问题.

其实只有某种特殊的通量插值才是守恒的(一维情况相对简单),这种特殊插值不能凭想象获得,必须从而弱解的定义导出(Berger,1987).而且在三维情况是否存在可以使用的这种特殊表达式还值得怀疑.因此不能凭直观理解来认为某种处理是否守恒.

分区插值是允许有误差的,如同一般数值方法有误差一样.采用分区后,在分区内边界的插值处理一般与内点格式不一样,所以一般与单区解有一些差别.这种差别一般属于当地截断误差范围(为小量级),属于数值计算可以接受的误差,不能随意理解为守恒问题.只有出现激波(接触间断除外)与分区内边界重合或者激波穿越分区边界时,才有所谓的守恒问题.如果真有守恒问题,它应该是不可接受的误差,属于O[1]的量级,主要表现在激波位置远远偏离正确激波位置.

分析表明,一般插值不守恒,但(对于耗散格式)稳定性好而且保证收敛和解唯一、对于高维问题也特别简单;而守恒插值(通量插值)稳定性差、收敛速度差、解不唯一、在高维情况特别复杂.因此,似乎不存在简单、稳定、收敛、解唯一的守恒覆盖分区算法.这与实际计算中所发现的覆盖分区算法往往能给出合理解矛盾.

守恒问题在数学上要求解在(网格)收敛时受敛到偏微分方程的弱解,物理上要求在有激波时要能获得正确的激波速度或位置.从宏观上看,如果运动激波能顺利穿透分区边界,则能获得正确解.

激波穿越覆盖分区界面时,可能性出现三种情况(图5.1):

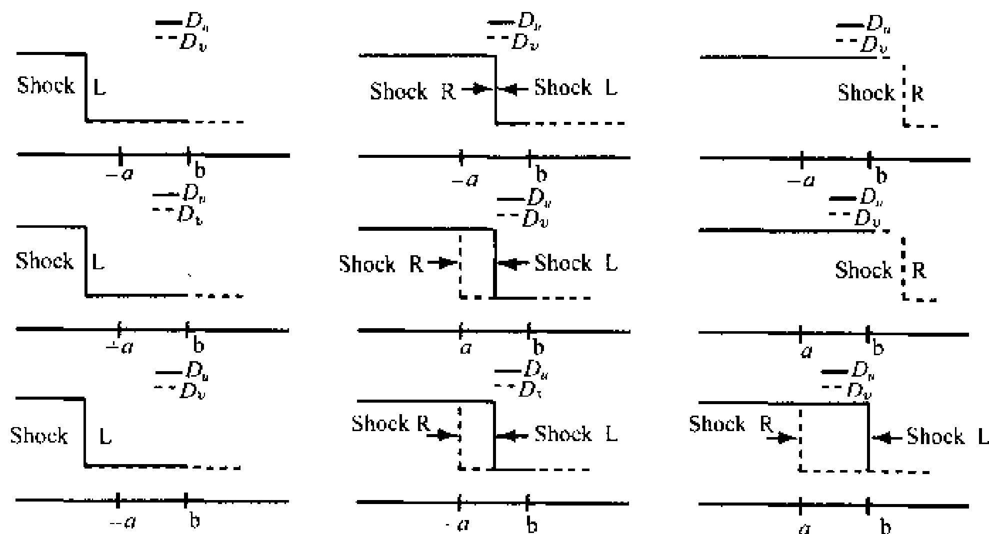


图5.1 激波穿越覆盖分区界面的三种可能情况

上:完美穿透;中:滞后穿透;下:穿透失败,解趋向定态双激波结构

1) 激波顺利穿越；

2) 激波被临时阻塞但最后穿越(滞后距离以网格点数计，所以网格加密守恒误差减小)；

3) 激波无法穿越，左区的激波卡在覆盖区的右端，右区的激波卡在覆盖区的左端，解最终趋向定态双激波结构.

只考虑充分条件. 于是可以采用反证法. 假设激波不能穿越，于是出现定态双激波结构. 定态双激波结构满足如下系统(不穿透条件)

$$0 = -\sigma_u(f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}) \Rightarrow f_{j+\frac{1}{2}} = h_L \, \forall j,$$

$$0 = -\sigma_v(g_{j+\frac{1}{2}} - g_{j-\frac{1}{2}}) \Rightarrow g_{j+\frac{1}{2}} = h_R \, \forall j,$$

$$u_0 = I(v_j), v_0 = I(u_j) \text{ 或 } f_{\frac{1}{2}} = I(g), g_{-\frac{1}{2}} = I(f).$$

如果分区算法使上述条件无法满足，那么激波能穿越. 影响激波穿越的条件有三类：(1) 物理问题即激波速度；(2) 数值方法即内点格式；(3) 内边界处理即插值方式. 下面介绍 Wu(1999)的研究结论.

首先看由物理问题决定的充分条件. 如果激波速度满足关系式

$$s_{\min} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} < s < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = s_{\max}, \tag{5.85}$$

则不穿越条件不成立，从而对所有格式和所有插值，激波能穿越. 事实上，只对数值振荡特别严重的内点格式，才存在上限. 在充分条件(5.85)中，上下限均有一定的意义：

下限意义：如果激波速度快，则能量大，能冲破阻力，如同鲨鱼破网前进；

上限意义：如果激波速度太快，能量太大，动能转化为内能，如同鱼死网破.

下面看由数值方法决定的充分条件. 格式黏性系数 $Q_{j+\frac{1}{2}}$ 按下面关系式定义

$$f_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) + \frac{1}{2}Q_{j+\frac{1}{2}}(u_j - u_{j+1}).$$

如果在激波附近格式黏性系数满足

$$Q_{j+\frac{1}{2}} \geqslant Q_{j+\frac{1}{2}}^{(\text{一阶迎风格式})},$$

则不穿越条件不成立，从而对所有激波速度和所有插值，激波能穿越.

事实上，对于一阶迎风格式，激波光滑无振荡，穿越分区界面如同光滑的泥鳅顺利穿过渔网. 对于一般的高分辨率格式，激波内数值处理都退化为一阶迎风格式.

最后考虑由插值方法决定的充分条件. 如果使用通量插值则不穿越条件不成立，从而对所有激波速度和所有格式，激波能穿越. 事实上，对于通量插值，激波基本没有遇到阻碍，穿越分区界面如同小鱼顺利穿过网孔大的渔网. 注意这一结论是对于有限尺寸的网格建立的.

因此理论意义上的守恒处理并非绝对必要，即某些类型的非守恒算法可以获得守恒解. 采用耗散型满足无振荡条件(即激波附近数值黏性系数不小于一阶迎风格式的)的内点格式加一般插值，便保证稳定、收敛、解唯一，并且能获得守恒解.

5.6.4 趣味理论分析二：覆盖分区计算稳定性、收敛性与解的唯一性

5.6.4.1 稳　定　性

除单侧迎风格式外，通量插值引起弱不稳定，这是因为数值通量可以展开为

$$f^n = f + h^p \frac{\partial^p f}{\partial x^p} + o[h^p].$$

所以给定 f^n，得 f 或 w 的常微分方程，其解至少含有一自由度（类似于图 5.2 中的支架结构的稳定性）.

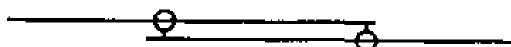


图 5.2　含自由度的支架结构中性（弱）不稳定，可以左右移动

对于一般插值，如果格式是耗散的，则增加覆盖长度能增加稳定性. 这可以从图 5.3 中用胶黏在一起的两段物体的稳定性获得启示. 事实上耗散格式必然具有数值黏性，黏性对格式的作用与胶对黏接部分的作用是类似的.

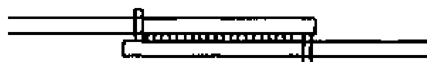


图 5.3　两段物体用胶黏在一起，显然稳定性与黏接部分的长度成正比

对于隐式格式 $L(u_j^{n+1}, u_j^n, u_j^{n-1}, \ldots) = 0$（只考虑左区插值，右区类似），可以使用下面三种耦合条件.

$$\begin{cases} u_0^{n+1} = I(v^{n+1}) \\ u_0^n = I(v^n) \\ \vdots \\ \text{平插} \end{cases}, \quad \begin{cases} u_0^{n+1} = I(v^n) \\ u_0^n = I(v^n), \\ \vdots \\ \text{部分滞后} \end{cases}, \quad \begin{cases} u_0^{n+1} = I(v^n) \\ u_0^n = I(v^{n-1}) \\ \vdots \\ \text{完全滞后} \end{cases}.$$

对于隐式格式，平插是不可实现的（即各区不能独立求解）. 稳定性研究表明，部分滞后条件减小稳定性. 与部分滞后方法相比，完全滞后方法具有与各区计算格式无关的无条件稳定性；完全滞后方法可以简单表达为在插值公式中各时间层的值均向前推一层；因各时间层被对等地对待，所以无条件稳定结果可以直观理解，这如同在特殊情况下所有级别的教师工资同时被升（或降）一级不会引起社会不稳定一样（如果只降高层次的工资则会引起社会不稳定）.

5.6.4.2 定常问题收敛速度与覆盖长度的关系

使用覆盖分区算法进行计算时，覆盖长度可以作为一个变量. 对于隐式耗散格式（耗

散的意义是，在没有物理黏性的情况下，格式对于任何波长的解也具备数值意义下的黏性，以使将误差尽快耗散掉）与完全滞后插值，发现与椭圆问题类似，收敛速度（迭代次数）与覆盖长度成正（反）比．但因在覆盖部分不可避免地进行了双重计算，所以覆盖长度的增加又使每一迭代步计算量增加．而总的计算量 N 又等于迭代次数乘以每次迭代的计算时间，所以必存在使计算量最小的最优覆盖长度 L（以网格点数量计算）．

对于单侧迎风格式（超音速格式），波是单向传播的，两插值端无循环干扰，所以 N 与 L 无关，而 T 与 L 成线性正比关系，所以最佳覆盖长度 $L=2$；

对于双侧格式（亚音速格式），两插值端有循环干扰，L 越小，干扰越大，所以增加 L 能减小 N，而 T 与 L 成线性正比关系，所以 CPU $=NT$ 必对某 $L>2$ 取最小值；

对于椭圆型格式（带数值黏性的中心格式）：最优覆盖长度接近 CFL（定义为波的移动速度乘以时间步长再除以网格间距）．这是因为 CFL 数为每一时间步平面波移动的网格点的数量，如果 $L<$CFL，那么在每一时间步波能从覆盖部分的一端到达另外一端从而相互干扰降低收敛速度；如果 $L>$CFL，覆盖区两端相互干扰没有了，从而计算量是覆盖长度的增函数．因此最佳覆盖长度必然接近 CFL．

这一结果被成功用于并行计算（Wu&Zou，2000）．

5.6.4.3　定常解的唯一性

可以使用几何分析法来研究定常解的唯一性．

首先考虑非耗散格式．非耗散格式的定常解 u_j 满足方程

$$u_{j+1}-u_{j-1}=0\Rightarrow u_j=c_1(-1)^j+c_2.$$

即存在锯齿结构（图 5.4）．



图 5.4　非耗散格式定常锯齿解结构

对于单区计算，如果使用边界条件 $u_0=0, u_{J+1}=u_J$，则有 $u_j=0$，即解是唯一的；如果使用边界条件 $u_0=0, u_{J+1}=u_{J-1}$，则有 $u_j=c(-1)^j-c$，即解是不唯一的．

对于覆盖网格，考虑简单的插值 $u_0=v_L, v_0=u_{-L}$ 和外边界条件 $u_{-J-1}=0, v_{J+1}=v_J$．如果 L 为偶数，解不唯一（上游不唯一）（图 5.5）；如果 L 为奇数，解唯一（图 5.6）．



图 5.5　L 为偶数时覆盖网格上的非唯一定常解
这里 $L=4$.

现在考虑耗散格式和通量插值．三点耗散格式的定常状态可以写成

$$u_{j+1}-u_{j-1}-\alpha^2(u_{j+1}-2u_j+u_{j-1})=0.$$



图 5.6　L 为奇数时覆盖网格上的唯一定常解
这里 $L=3$.

因此,定常解的一般表达式为

$$u_j = c_1\kappa^j + c_2.$$

这里 κ 满足特征方程

$$\frac{k+1}{2} - \alpha^2\frac{k-1}{2} = 0.$$

对于覆盖分区算法,不难验证,线性情况下的数值通量表达式为

$$f_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_j + u_{j+1}) + \frac{\alpha^2}{2}(u_j - u_{j+1}) = c_2^{(u)},$$

$$g_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(v_j + v_{j+1}) + \frac{\alpha^2}{2}(v_j - v_{j+1}) = c_2^{(v)}.$$

由通量插值和边界条件得

$$\begin{cases} f_{\frac{1}{2}} = I(g_{J+\frac{1}{2}}) = c_2^{(v)} \Rightarrow c_2^{(v)} = c_2^{(u)}, \\ g_{-\frac{1}{2}} = I(f_{J+\frac{1}{2}}) = c_2^{(u)} \Rightarrow c_2^{(u)} = c_2^{(v)}. \end{cases}$$

因此 $c_2^{(u)} = c_2^{(v)} = -k^{-J}c_1^{(u)}, c_1^{(v)} = 0$. 于是:

1) 对于单侧格式,$\alpha^2 = 1 \Rightarrow \kappa \to \infty \Rightarrow c_1^{(u)} = 0$,解唯一;

2) 对于双侧格式,κ 有限,$c_1^{(u)}, c_2^{(v)}, c_2^{(u)}$ 任意,解不唯一. 将定常解写为

$$u_j = c_2^{(u)}(\kappa^{j-J} - 1), v_j = c_2^{(u)}, \kappa = -\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

对于小时间步格式 $\alpha^2 < 1$ (如显式格式):$\kappa < 0, |\kappa| > 1$,因此解为发散型锯齿结构,上下游不唯一(图 5.7);对于大时间步格式 $\alpha^2 > 1$(如隐式格式):$\kappa > 0, |\kappa| > 1$,因此

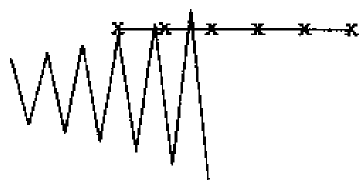


图 5.7　对于小时间步格式,
解为发散型锯齿结构

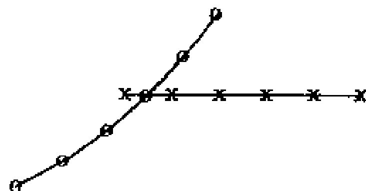


图 5.8　对于大时间步格式,
解为发散型单调结构

解为发散型单调结构,上下游不唯一(图 5.8).

以上是线性唯一性问题. 如果存在激波,则有所谓的非线性不唯一问题. Wu(1996a)首先通过理论分析证明了对于单侧迎风格式或通量插值,则定常激波解唯一. 后来 Wu(1999)把唯一性问题看成是激波穿越分区界面问题从另一角度获得了同样结论. 定常问题的计算是从伪非定常问题过渡而来的. 在有激波时,初始激波根据初始条件的不同可能

在覆盖区的左边、覆盖区中间或覆盖区的右边形成(图 5.9).如果激波穿越条件不满足,则根据初始激波形成的位置,将出现没有物理意义的定态双激波结构,即定常解与初始条件有关.

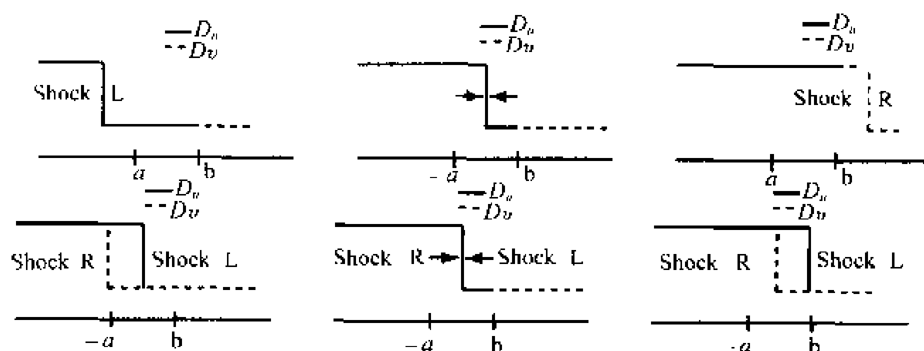


图 5.9　左:左初始激波;中:内初始激波;右:右初始激波

显然如果在激波内数值黏性满足 $Q_{j+\frac{1}{2}} \geqslant |A^{(R)}_{j+\frac{1}{2}}|$ 或使用通量插值,从而非定常激波能穿越,则定常激波解唯一.

如果精确的定常激波正好处于覆盖部分的边界(左端或右端),则因内插和激波陡峭引起周期脉动,使计算一般不收敛.此时可以用外插代替内插,强制收敛.外插相当于把分区边界与激波给强制分离了,这如同两个人关系不好,最好将它们分开一样.

参　考　文　献

[1] Beam R. M., Warming R. F. and Yee H. C. *Stability analysis of numerical boundary conditions and implicit difference approximations for hyperboilic equations*, J. Comput. Phys., **48** (1982), pp. 200 - 222.

[2] M. Berger, *On conservation at grid interfaces*, SIAM J. Numer. Anal., **24**(1987), pp. 967 - 983.

[3] M. Goldberg and E. Tadmor, *Scheme-independent stability criteria for difference approximations of hyperbolic initial-boundary value problems. II*, Math. Comp., **36**(1981), pp. 603 - 626.

[4] B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, and A. Sundström, *Stability theory of difference approximations for mixed initial-boundary value problems II*, Math. Comp., **26**(1972), pp. 649 - 686.

[5] H.-O. Kreiss, *On difference approximations of the dissipative type for hyperbolic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **17**(1964), pp. 335 - 353.

[6] H.-O. Kreiss and L. Wu, *On the stability definition of difference approximations for the initial boundary value problem*, Applied Numer. Math., **12**(1993), pp. 213 - 227.

[7] B. Gustafsson, *The convergence rate for difference approximations to general mixed initial boundary value problems*. SIAM J. Numer. Anal., **18**(1981), pp. 179 - 190.

[8] B. Gustafsson, *The choice of numerical boundary conditions for hyperbolic systems*, J. Comput. Phys., **48** (1982), pp. 270 - 283.

[9] C. Hirsch, Numerical Computation of Internal and External Flows, Volumes 1, John Wiley & Sons, Chichester (1990).

[10] P. Lax and B. Wendroff, *System of conservation laws*, 1960 (XIII), pp. 217 - 237.

[11] A. Lerat and Z. N. Wu, *Stable conservative multidomain treatments for implicit Euler solvers*, J. Comput. Phys.,

123(1996), pp. 45 – 64.

[12] E. Part-Enander and B. Sjögreen, *Conservative and non-conservative interpolation between overlapping grids for finite volume solutions of hyperbolic problems*, Computers and Fluids, **23**(1994), pp. 551 – 574.

[13] R. Peyret and T. D. Taylor, Computational Methods for Fluid Flow, New York: Springer-Verlag (1982)

[14] R. D. Richtmyer and K. W. Morton, Difference Methods for Initial Value Problems, New York: John-Wiley(1967).

[15] G. Sköllermo, *Error analysis of finite difference schemes applied to hyperbolic initial boundary value problems*, Math. Comp., **33**(1979), pp. 11 – 35.

[16] M. Thuné, *Automatic GKS-stability analysis*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., **7**(1986), pp. 959 – 977.

[17] L. N. Trefethen, *Group velocity in finite difference schemes*, SIAM Review, **24**(1982), pp. 113 – 136.

[18] L. N. Trefethen, *Instability of difference models for hyperbolic initial boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math., **37**(1984), pp. 329 – 367.

[19] L. N. Trefethen, *Stability of finite-difference models containing two boundaries or interfaces*, Math. Comp., **45** (1985), pp. 279 – 300.

[20] J. M. Varah, *Stability of difference approximations to the mixed initial boundary value problems for parabolic systems*, SIAM J. Numer. Anal., **8**(1971), pp. 598 – 615.

[21] Z. N. Wu, *Uniqueness of steady state solutions for difference equations on overlapping grids*, SIAM J. Numer. Anal., **33**(1996a), pp. 1336 – 1357.

[22] Z. N. Wu, *Convergence study of an implicit multidomain approximation for the compressible Euler equations*, Computers and Fluids, **25**, (1996b), pp. 181 – 196.

[23] Z. N. Wu, *Steady and unsteady shock waves on overlapping grids*, SIAM J. Sci. Comput., **20**(1999), pp. 1851 – 1874.

第六章　实用化基础

本章为理论基础和实际应用架桥，主要介绍网格系统基本概念、一维计算方法向高维推广的基本原理、边界条件的有效处理、分区并行概念、一些实用原则等.

6.1　网格系统

本节对网格的构造并不介绍，主要以二维情况来介绍网格的一些基本概念，同时简要介绍三维网格的一些概念.

6.1.1　物理坐标系中的网格

我们可以简单把二维网格想象成棋盘上的格子：

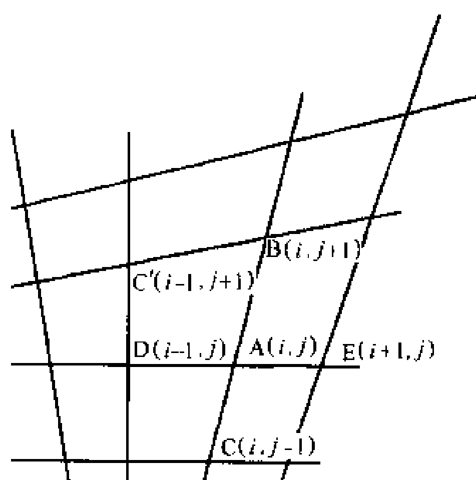


图 6.1　二维结构网格

(1)如果每个网格单元为四边形(如象棋棋盘格)，则称为结构网格. 以图 6.1 为例，由节点 A、B、C′、D 构成的网格单元 ABC′D 为任意四边形. 在有限差分方法中，数值解定义在网格节点如 A、B、C、D、E 上. 为了方便，我们称数值解定义在网格线节点上的网格为有限差分网格. 在稍后讲到的有限体积法中，数值解可以定义在网格单元的中心，此时网格称为有限体积网格. 但这种区别是人为的，只是为了本书前后叙说方便. 之所以称为结构网格，是因为各网格点之间的排列属于有序排列，在二维情况下由两束网格线(每束网格线互不相交)的相交点组成，各网格点的逻辑位置可以用双重指标(i,j)标识，一束网格线由 $i=\text{const}$ 定义，另一束网格线由 $j=\text{const}$ 定义，并且$(i-1,j)$，$(i+1,j)$，$(i,j+1)$，$(i,j-1)$分别标定了点(i,j)的左右上下相邻网格点的位置.

(2)如果每个网格单元为三角形(如跳跳棋棋盘格)，则称为非结构网格. 以图 6.2 为例，每一个网格单元都为三角形，数值解一般定义在三角形公共节点上，如网格单元(1)、(2)、(3)、(4)和(5)的公共节点 J. 之所以称为非结构网格，是因为各网格点之间的排列属于无序排列. 各网格节点用单指标 j 标识，另外还需指针指标标明点与点之间的连接.

(3)除结构网格和非结构网格外,还存在所谓的混合网格和笛卡尔网格.最常见的混合网格为混合结构非结构网格(混合三角形-四边形,混合四面体-六面体),即部分区域采用结构网格,部分区域采用非结构网格.笛卡尔网格分为各向同性网格(每个网格单元为一正方形或正六面体,根据自适应要求把部分网格单元进一步划分成小网格单元,如把一个正方形等分成四个正方形,并根据需要可以进一步分割)和各向异性网格.图 6.3,6.4 给出了这样几个网格(见 Wu,1998).

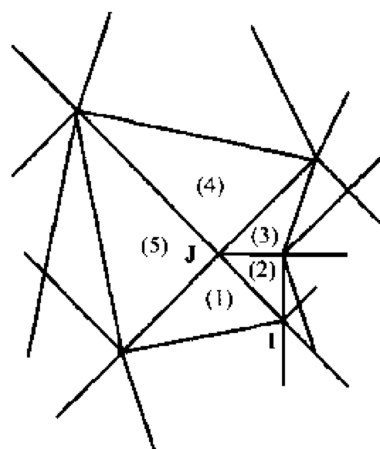
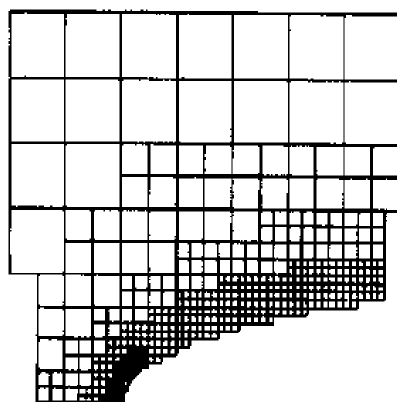
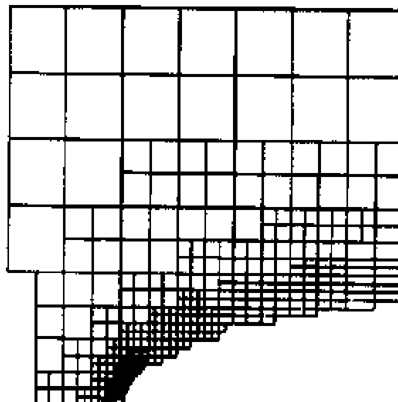


图 6.2　二维非结构网格

(4)之所以称为网格,是因为相邻各网格点之间的联系被规定好了,点与点之间用线段连起来了.如果数值解定义在空间的一些随机点上,点与点之间的联系不需知道,相应的方法称为无网格方法.现在无网格方法的研究还在试探之中.


图 6.3　各向同性笛卡尔网格


图 6.4　各向异性笛卡尔网格

在三维情况下,结构网格的每一个单元为任意六面体,网格节点由三束网格面的交点组成(每一束网格面互不相交),位置用三重指标(i,j,k)标示.对每一个固定的 i,由 j,k 变化的所有网格点组成的曲面称为 i 方向的网格面.任意 i 方向的网格面投影到一平面上就相当于一个二维结构网格.由 j,k 固定但 i 变化的所有网格点组成一条 i 方向的网格线.同理可以定义 j,k 方向的网格面和网格线.对于每个网格点(i,j,k),左右上下前后相邻的网格点分别为$(i-1,j,k)$,$(i+1,j,k)$,$(i,j-1,k)$,$(i,j+1,k)$,$(i,j,k-1)$,$(i,j,k+1)$.一般要求 i,j,k 按增加方向满足右手法则,否则可能引起混乱(如体积为负等).在三维情况下,非结构网格的网格单元可以是任意多面体(一般面越少越好,所以采用四面体).

本书只就结构网格介绍数值方法.在计算区域大小一定的情况下,网格越密,则网格点数目越大.网格点的数目一方面由计算机条件决定,另一方面,在网格点分布方式一定的情况下,网格点越密,则计算误差越小.因此,网格的构造既要考虑计算机条件,又要考虑精度要求.根据误差分析理论,误差的绝对值除与网格尺寸成正比外,还与流动参数的梯度成正比.如果要求误差的绝对值几乎处处相等,那么可以采用自适应网格,即梯度大

的地方网格密、梯度小的地方网格稀. 另外,在固体壁面附近,网格也必须足够密,以较好地反映固体壁面的弯曲.

网格的构造在计算中要花费很大精力. 构造网格并不是计算流体力学所特有的. 任何偏微分方程问题的数值求解都需要网格. 很难把网格构造纳入力学范畴. 它可能更属于数学中的几何. 实际上网格构造在计算流体力学软件中被称为前处理. 不管前处理软件来源如何,计算流体力学工作者应该尽量使用已经成熟的网格构造软件或使用他人已经构造好的网格.

6.1.2 分区结构网格

计算区域往往很复杂,可能包含一个物体(如单个机翼)和多个物体(如多段机翼). 图 6.5 形象地给出了这种可能的计算域. 此时很难对计算区域构造单一的结构网格,而需要采用分区算法. 分区算法的基本思想是这样的. 首先将总体区域分成若干个子区域,再对每个子区域分别建立网格,并在每个网格上对方程分别求解. 各子区的解在内边界处的耦合则通过耦合条件即插值来实现.

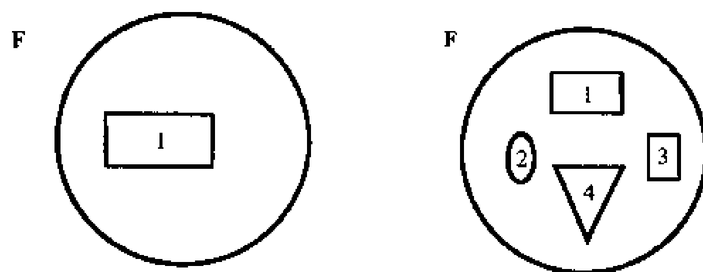


图 6.5 计算域

左:简单计算域;右:多连通计算域.

图中 F 为外边界,数字代表物体.

无论是何种计算域,分区时将其分成若干个形状尽量规则的子域(子区),以方便在每个子区中独立建立网格. 若相邻两子区的分界线(内边界)重合,则分区网格称对接网格. 若相邻两子区含有相互覆盖部分,则此分区网格称覆盖网格. 覆盖分区又分部分覆盖和完全覆盖两种. 图 6.6 以两区为例给出了各种分区情况. 与对接分区相比,覆盖分区因其内边界的位置享有较高自由度,所以构造网格较灵活,需要的子区数目较少,各子区的网格可以较规则. 已经存在较成熟的商业软件,将区域自动分解.

对接网格分错点对接和正点对接两类,见图 6.7. 在错点对接中,相邻子区各有一条网格线(网格单元边界)与对接线重合. 对每侧子区,对接线另一侧还附加虚网格单元(如图中的单元 abcd)用以定义耦合条件(内边界条件). 在正点对接中,相邻子区各有一条网格中点线(即数值解定义的点)与对接线重合.

图 6.8 给出了一组部分覆盖网格. 覆盖区两侧网格任意交错. 与对接网格不同,覆盖网格在内边界处有两条独立的内边界线(如图中的 11′ 和 22′). 两条内边界线界定了覆盖范围. 在两条边界线上的网格单元(如单元 abcd 和 efgh)都需通过从另一侧网格插值来定

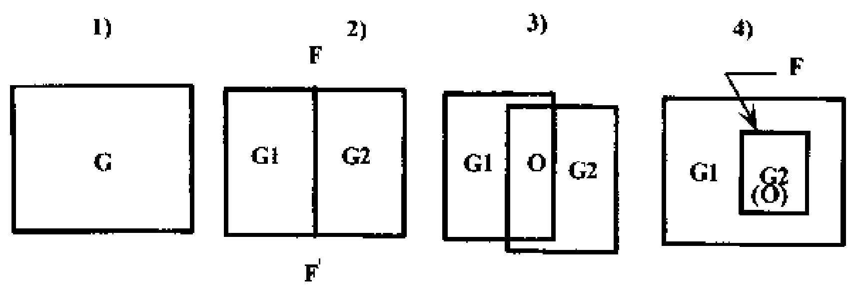


图 6.6　区域分解

1)计算域;2)对接分区;3)部分覆盖分区;4)完全覆盖分区.

图中 FF'为内边界,O 表示覆盖部分

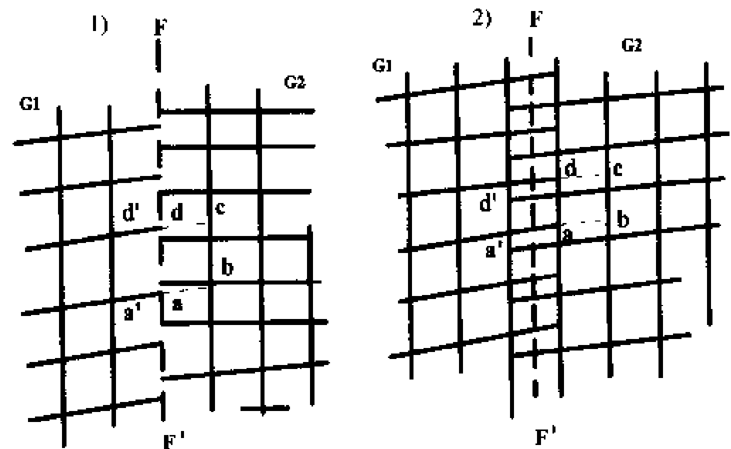


图 6.7　对接网格

1)错点对接;2)正点对接;FF'为对接线

义耦合条件.

图 6.9 给出了一组完全覆盖网格.围绕物体 2 的网格(网格 2)完全被包含在围绕物体 1 的网格(网格 1)之中.处于网格 2 周线 F 上的网格点的耦合条件从网格 1 插值定义.

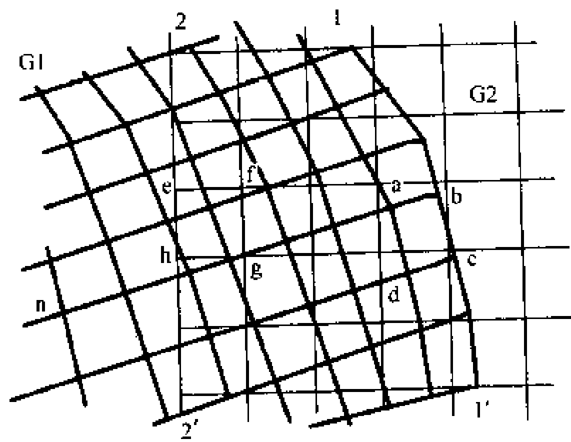


图 6.8　部分覆盖网格

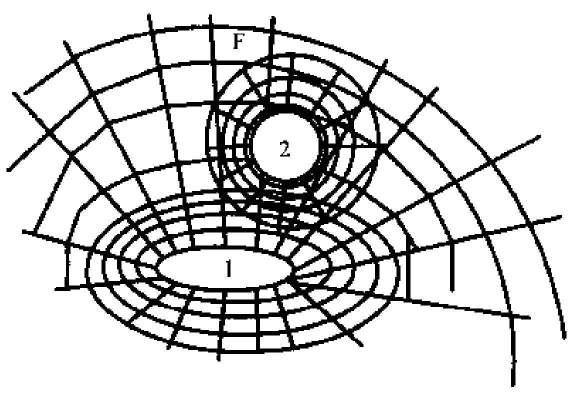


图 6.9　完全覆盖网格

为了能使网格 2 中的解正确地反馈到网格 1 中，将网格 1 中落在物体 2 以外的网格点找出，这些点的内边界(接近物体 2 表面形状的封闭曲线)上的值从网格 2 插值获得，从而使该内边界以内的区域(称'洞')的计算结果对'洞'外不产生影响. 这就是所谓的挖洞技术，即把网格 1 中落在物体 2 以内的网格点给'挖掉'，'洞'的边界上的值从网格 2 上插值获得. 实际计算中，在被"挖掉"的网格上可继续求解差分格式，这样便于保持结构网格的优点. 被"挖掉"的网格上的数值解一般不具备物理意义. 因在洞的边界上重新定义了耦合条件，这些非物理解不会传播到洞外的区域. 采用覆盖分区算法的最大优点是，如果计算的是绕多体问题的流动(如绕多个圆柱的流动)，则在每个物体上固定一个网格，各网格在不同时刻的坐标不需要重新构造，只需在初始网格的基础上加上平移和转动即可.

假设初始网格某网格点的坐标为 $\boldsymbol{x}_0$，经过平动 $\boldsymbol{t}$ 和转动 $\boldsymbol{r}$，新时刻的坐标变为 $\boldsymbol{x}$. 先考虑转动. 假定转动轴通过点 $\boldsymbol{x}_p$ 并且转动轴的方向为 $\boldsymbol{n}$. 设 $\boldsymbol{x}_0$ 从而 $\boldsymbol{x}$ 在转动轴上的投影为 $\boldsymbol{x}_r$，则有

$$\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{x}_p + [(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_p) \cdot \boldsymbol{n}]\boldsymbol{n}. \tag{6.1}$$

为了方便，记

$$d = |\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_r|.$$

设在新时刻网格绕转动轴转动的角度为 ω，根据转动的定义有(假设 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 同向)：

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r) \cdot (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_r) = d^2\cos(\omega),$$

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r) \times (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_r) = - d^2\sin(\omega)\boldsymbol{n}.$$

利用三重矢量积关系式

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c},$$

并令 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r$，得

$$d^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r) - d^2\cos(\omega)(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_r) = - d^2\sin(\omega)(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_r) \times \boldsymbol{n}.$$

从而有

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r = \cos(\omega)(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_r) - \sin(\omega)(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_r) \times \boldsymbol{n}.$$

如果再把平动加上去，新时刻的坐标为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{x}_r + \cos(\omega)(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_r) - \sin(\omega)(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_r) \times \boldsymbol{n}. \tag{6.2}$$

给定 $\boldsymbol{x}_p$ 和 $\boldsymbol{n}$，在新时刻如果 P 点即 $\boldsymbol{x}_p$ 点平动为 $\boldsymbol{t}$、网格绕转动轴的转动角度为 ω，则坐标由(6.1)、(6.2)可以算出.

6.2 高维问题计算方法

对于高维问题，由于计算区域一般不属于长方形或长方体，所以网格线一般是曲线. 这里只考虑曲线结构网格上的有限体积法和有限差分方法.

6.2.1 有限差分定义

考虑三维问题. 这里只考虑直线网格，网格点(i,j,k)坐标为 $x_{i,j,k} = ih^{(x)}$，$y_{i,j,k} =$

$jh^{(y)}, z_{i,j,k} = jh^{(z)}$. 在三两个方向上的空间步长 $h^{(x)}, h^{(y)}$ 和 $h^{(z)}$ 可以不一样，它们之间的比称为展弦比.

高维问题涉及每一方向的偏导数，每一方向的偏导数均可用一维问题类似的方法求得差分算子. 例如，偏导数 ϕ_x, ϕ_y 和 ϕ_z 的中心差分为

$$(\phi_x)_{i,j,k} \approx \frac{\bar{\delta}_x \phi}{h^{(x)}}, \bar{\delta}_x \phi \triangleq \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{2};$$

$$(\phi_y)_{i,j,k} \approx \frac{\bar{\delta}_y \phi}{h^{(y)}}, \bar{\delta}_y \phi \triangleq \frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j-1,k}}{2};$$

$$(\phi_z)_{i,j,k} \approx \frac{\bar{\delta}_z \phi}{h^{(z)}}, \bar{\delta}_z \phi \triangleq \frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k-1}}{2}.$$

更高阶差分可以用前面类似办法获得.

高阶导数也可以用一维问题类似办法获得. 但混合导数 ϕ_{xy}, ϕ_{yz} 和 ϕ_{zx} 需要另外考虑. 令 ϕ_x 的差分算子为 L_x，ϕ_y 的差分算子为 L_y，ϕ_z 的差分算子为 L_z. 例如

$$L_x = \bar{\delta}_x, L_x = \delta_x^-, L_x = \delta_x^+, L_x = \ln(1 + \delta_x^+);$$

$$L_y = \bar{\delta}_y, L_y = \delta_y^-, L_y = \delta_y^+, L_y = \ln(1 + \delta_y^+);$$

$$L_z = \bar{\delta}_z, L_z = \delta_z^-, L_z = \delta_z^+, L_z = \ln(1 + \delta_z^+).$$

这里 δ^- 和 δ^+ 分别代表向后和向前差分.

于是混合导数 $(\phi_{xy})_{i,j,k}$ 的差分算子可以用下面方式获得：

$$(\phi_{xy})_{i,j,k} = \frac{1}{h^{(x)} h^{(y)}} L_x L_y \phi_{i,j,k},$$

$$(\phi_{xy})_{i,j,k} = \frac{1}{h^{(x)} h^{(y)}} L_y L_x \phi_{i,j,k},$$

$$(\phi_{xy})_{i,j,k} = \frac{1}{h^{(x)} h^{(y)}} [\theta L_x^a L_y^a + (1 - \theta) L_x^b L_y^b] \phi_{i,j,k},$$

$$\vdots$$

这里 L^a 和 L^b 可以是不同的差分算子. 混合导数 $(\phi_{yz})_{i,j,k}$ 和 $(\phi_{zx})_{i,j,k}$ 可以用类似方法求得.

下面是两个差分算子的例子

$$(\phi_{xy})_{i,j,k} = \frac{1}{h^{(x)} h^{(y)}} \delta_x^+ \delta_y^+ \phi_{i,j,k}$$

$$= \frac{1}{h^{(x)} h^{(y)}} (\phi_{i+1,j+1,k} - \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j+1,k} + \phi_{i,j,k}),$$

$$(\phi_{xy})_{i,j,k} = \frac{1}{h^{(x)} h^{(y)}} \delta_x^- \delta_y^- \phi_{i,j,k}$$

$$= \frac{1}{h^{(x)} h^{(y)}} (\phi_{i-1,j-1,k} - \phi_{i-1,j,k} - \phi_{i,j-1,k} + \phi_{i,j,k}).$$

6.2.2　有限差分法

在曲线网格上直接构造差分很不方便. 为了直接使用有限差分，引入坐标变换，将物

理空间转换成计算空间,使得物理空间中的曲线网格转换成计算空间中的直线网格.将网格点(i,j,k)在物理空间上的坐标记为 $x_{i,j,k}=(x_{i,j,k},y_{i,j,k},z_{i,j,k})$.

考虑 i 固定而j,k 变化的所有网格点组成的曲面,将该曲面方程记为

$$\xi(t,x,y,z)=i\delta\xi. \tag{6.3}$$

这里,$\delta\xi$ 为常数.

类似地,考虑 j 固定而i,k 变化的所有网格点组成的曲面,将该曲面方程记为

$$\eta(t,x,y,z)=j\delta\eta. \tag{6.4}$$

这里,$\delta\eta$ 为常数.

最后,考虑 k 固定而i,j 变化的所有网格点组成的曲面,将该曲面方程记为

$$\zeta(t,x,y,z)=k\delta\zeta. \tag{6.5}$$

这里,$\delta\zeta$ 为常数.

以(ξ,η,ζ)作为新的坐标系即计算坐标系,那么根据定义(6.3)至(6.5),物理坐标系中的曲线网格在计算坐标系中便成了直线网格.特别地,如果令 $\delta\xi=\delta\eta=\delta\zeta=1$,那么计算坐标系中的每一个网格单元都是体积为1的正六面体.

不失一般性,以后总是取 $\delta\xi=\delta\eta=\delta\zeta=1$.

先将物理坐标系(t,x,y,z)中的 N-S 方程写为

$$W_t+F_x^{(E)}+G_y^{(E)}+H_z^{(E)}=F_x^{(V)}+G_y^{(V)}+H_z^{(V)}+S. \tag{6.6}$$

首先求 N-S 方程在计算坐标系下的形式.由第二和第三章知道,经坐标变换

$$\begin{aligned}\tau&=t,\\ \xi&=\xi(t,x,y,z),\\ \eta&=\eta(t,x,y,z),\\ \zeta&=\zeta(t,x,y,z).\end{aligned}$$

N-S 方程的守恒形式变为

$$\overline{W}_\tau+\overline{F}_\xi^{(E)}+\overline{G}_\eta^{(E)}+\overline{H}_\zeta^{(E)}=\overline{F}_\xi^{(V)}+\overline{G}_\eta^{(V)}+\overline{H}_\zeta^{(V)}+JS. \tag{6.7}$$

这里

$$\begin{aligned}\overline{W}&=JW,\\ \overline{F}^{(E)}&=J(\xi_tW+\xi_xF^{(E)}+\xi_yG^{(E)}+\xi_zH^{(E)}),\\ \overline{G}^{(E)}&=J(\eta_tW+\eta_xF^{(E)}+\eta_yG^{(E)}+\eta_zH^{(E)}),\\ \overline{H}^{(E)}&=J(\zeta_tW+\zeta_xF^{(E)}+\zeta_yG^{(E)}+\zeta_zH^{(E)}),\\ \overline{F}^{(V)}&=J(\xi_xF^{(V)}+\xi_yG^{(V)}+\xi_zH^{(V)}),\\ G^{(V)}&=J(\eta_xF^{(V)}+\eta_yG^{(V)}+\eta_zH^{(V)}),\\ \overline{H}^{(V)}&=J(\zeta_xF^{(V)}+\zeta_yG^{(V)}+\zeta_zH^{(V)}),\end{aligned}$$

于是(令 I 为单位矩阵)

$$N_1=\frac{d\overline{F}}{d\overline{W}}=J(\xi_tI+\xi_xA+\xi_yB+\xi_zC),$$

$$N_2=\frac{d\overline{G}}{d\overline{W}}=J(\eta_tI+\eta_xA+\eta_yB+\eta_zC),$$

$$N_3 = \frac{d\bar{H}}{d\bar{W}} = J(\zeta_t I + \zeta_x A + \zeta_y B + \zeta_z C).$$

$F^{(V)}, G^{(V)}, H^{(V)}$所含偏微分可按下面方式计算

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x + u_\zeta \zeta_x,$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y + u_\zeta \zeta_y,$$
$$u_z = u_\xi \xi_z + u_\eta \eta_z + u_\zeta \zeta_z,$$
$$v_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x + v_\zeta \zeta_x,$$
$$\vdots$$

显然,为了求(6.7),必须知道 ξ,η 和 ζ 对 x, y 和 z 的偏导数.第二章中已经求得

$$\xi_x = J^{-1}(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta),$$
$$\xi_y = J^{-1}(z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta),$$
$$\xi_z = J^{-1}(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta),$$
$$\eta_x = J^{-1}(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta),$$
$$\eta_y = J^{-1}(z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta),$$
$$\eta_z = J^{-1}(x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta),$$
$$\zeta_x = J^{-1}(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi),$$
$$\zeta_y = J^{-1}(z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi),$$
$$\zeta_z = J^{-1}(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi),$$
$$\xi_t = -\xi_x x_t - \xi_y y_t - \xi_z z_t,$$
$$\eta_t = -\eta_x x_t - \eta_y y_t - \eta_z z_t,$$
$$\zeta_t = -\zeta_x x_t - \zeta_y y_t - \zeta_z z_t.$$

这里,J 为坐标变换的雅可比

$$J = \det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right) = x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) + x_\eta(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi).$$

因此,为了求 ξ,η 和 ζ 对 x, y 和 z 的偏导数,必须先求 x, y 和 z 对 ξ,η 和 ζ 的偏导数,即 $x_\xi, x_\eta, x_\zeta, y_\xi, y_\eta, y_\zeta, z_\xi, z_\eta, z_\zeta$.显然只需要计算网格点上的这些偏导数.由于任意网格点(i,j,k)的物理坐标 $\boldsymbol{x}_{i,j,k}$已经知道,所以计算十分简单.例如,用二阶中心差分得

$$(x_\xi)_{i,j,k} = \frac{1}{2\delta\xi}(x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}),$$
$$(y_\xi)_{i,j,k} = \frac{1}{2\delta\xi}(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}),$$
$$(z_\xi)_{i,j,k} = \frac{1}{2\delta\xi}(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}),$$
$$(x_\eta)_{i,j,k} = \frac{1}{2\delta\eta}(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}),$$
$$(y_\eta)_{i,j,k} = \frac{1}{2\delta\eta}(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}),$$
$$(z_\eta)_{i,j,k} = \frac{1}{2\delta\eta}(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}),$$

$$(x_\zeta)_{i,j,k} = \frac{1}{2\delta\zeta}(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}),$$

$$(y_\zeta)_{i,j,k} = \frac{1}{2\delta\zeta}(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}),$$

$$(z_\zeta)_{i,j,k} = \frac{1}{2\delta\zeta}(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}).$$

也可以用更高阶精度的差分计算.

有了坐标变换函数,方程(6.7)中的各项就确定了.针对每一个方向的偏微分,用与一维问题类似的方法进行差分逼近,就得到了所需要的格式.首先将方程(6.7)写为

$$\overline{W}_\tau + \overline{F}_\xi + \overline{G}_\eta + \overline{H}_\zeta = \overline{S}. \tag{6.8}$$

这里

$$\overline{F} = \overline{F}^{(E)} - \overline{F}^{(V)},$$
$$\overline{G} = \overline{G}^{(E)} - \overline{G}^{(V)},$$
$$\overline{H} = \overline{H}^{(E)} - \overline{H}^{(V)},$$
$$\bar{S} = JS.$$

于是半离散形式的格式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{W}_{i,j,k} + \sum_{\text{sides}}\Phi^*_{\text{sides}} = \bar{S}_{i,j,k}. \tag{6.9}$$

这里

$$\sum_{\text{sides}}\Phi^*_{\text{sides}} = \overline{F}^*_{i+\frac{1}{2},j,k} - \overline{F}^*_{i-\frac{1}{2},j,k} + \overline{G}^*_{i,j+\frac{1}{2},k} - \overline{G}^*_{i,j-\frac{1}{2},k} + \overline{H}^*_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \overline{H}^*_{i,j,k-\frac{1}{2}}.$$

在上式中,$\overline{F}^*_{i+\frac{1}{2},j,k}$,$\overline{G}^*_{i,j+\frac{1}{2},k}$和$\overline{H}^*_{i,j,k+\frac{1}{2}}$分别称为 i,j 和k 方向的数值通量,写成统一形式

$$\overline{F}^*_{i+\frac{1}{2},j,k} = \Phi^{(n)}_{i+\frac{1}{2},j,k},$$
$$\overline{G}^*_{i,j+\frac{1}{2},k} = \Phi^{(n)}_{i,j+\frac{1}{2},k},$$
$$\overline{H}^*_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \Phi^{(n)}_{i,j,k+\frac{1}{2}}.$$

这里(令 $F=F^{(E)}-F^{(V)}$,$G=G^{(E)}-G^{(V)}$,$H=H^{(E)}-h^{(V)}$)

$$\Phi^{(n)}_{(\cdot)} = J(W_{(\cdot)}n_t^{(\cdot)} + F_{(\cdot)}n_x^{(\cdot)} + G_{(\cdot)}n_x^{(\cdot)} + H_{(\cdot)}n_x^{(\cdot)}), \tag{6.10}$$

$$n^{i+\frac{1}{2},j,k} = \xi,\quad n^{i,j+\frac{1}{2},k} = \eta,\quad n^{i,j,k+\frac{1}{2}} = \zeta.$$

本节稍远的地方会用几个具体格式说明如何计算 $\Phi^{(n)}_{(\cdot)}$中的无粘部分.粘性部分相对比较简单,可以直接使用中心差分计算所需要的偏微分(主要有速度的偏导数和温度的偏导数),然后代入黏性通量表达式以获得数值通量中的黏性部分.

有限差分法要求坐标变换函数的计算具有一定精度,要求 x_ξ,x_η,x_ζ,y_ξ,y_η,y_ζ,z_ξ,z_η 和 z_ζ 的计算与格式具有同样的精度.这就要求物理坐标系下的网格具有一定的均匀度.

如果几何区域不规则,很难保证网格具有一定的均匀度.某些几何体含有奇点.在奇点附近网格大小可能发生较大的变化.此时坐标变换函数可能取无限大值.在这种情况下,有限差分方法很难获得所应有的精度,最好采用下面的有限体积法.

6.2.3 有限体积法

有限体积法可以看成积分形式的有限差分法.有限差分法直接对偏微分方程进行离散,而有限体积法直接对积分型方程进行离散.

首先将微分形式的方程写成

$$W_t + F_x + G_y + H_z = S. \tag{6.11}$$

这里

$$F = F^{(E)} - F^{(V)}, G = G^{(E)} - G^{(V)}, H = H^{(E)} - H^{(V)}.$$

记 $\boldsymbol{\Phi} = F\boldsymbol{e}_x + G\boldsymbol{e}_y + H\boldsymbol{e}_z$,于是方程(6.11)可以写为

$$W_t + \nabla \cdot \boldsymbol{\Phi} = S.$$

考虑任意有限体积 $\Omega(t)$,其边界 $\Sigma(t)$ 的速度为 $\boldsymbol{V}_\Sigma$,边界外法线方向为 $\boldsymbol{n}$.则积分形式的方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} W \mathrm{d}\Omega + \oint_{\Sigma(t)} \boldsymbol{\Phi}^* \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\Sigma = \int_{\Omega(t)} S \mathrm{d}\Omega. \tag{6.12}$$

这里 $\boldsymbol{\Phi}^* = \boldsymbol{\Phi} - W\boldsymbol{V}_\Sigma$.

有限体积法的基本原理是,将每一个网格单元作为有限体积,对积分方程(6.12)进行直接离散.设给定网格节点 (i,j,k) 及其坐标 $\boldsymbol{x}_{i,j,k}$.考虑由八个节点 $(i,j,k),(i,j+1,k),(i,j+1,k+1),(i,j,k+1),(i+1,j,k),(i+1,j+1,k),(i+1,j+1,k+1),(i+1,j,k+1)$(为了方便按顺序标为 a,b,c,d,e,f,g,h)构成的网格单元 $\Omega_{i,j,k}$(图 6.10).网格单元的中心记为 $c_{i,j,k}$.

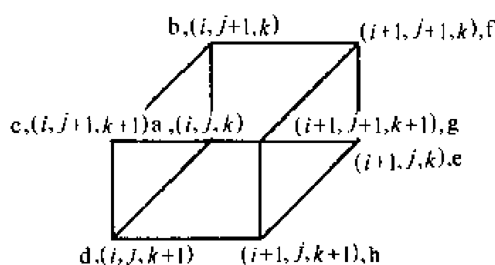


图 6.10　网格单元

网格单元的六个面(abcd),(efgh),(adhe),(bagf),(abfe),(dcgh)的面积分别为

$$\boldsymbol{\Sigma}_{i-\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{i,j+1,k} - \boldsymbol{x}_{i,j,k+1}) \times (\boldsymbol{x}_{i,j+1,k+1} - \boldsymbol{x}_{i,j,k}) \ \text{(abcd)},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{i+1,j+1,k} - \boldsymbol{x}_{i+1,j,k+1}) \times (\boldsymbol{x}_{i+1,j+1,k+1} - \boldsymbol{x}_{i+1,j,k}) \ \text{(efgh)},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{i,j-\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{i+1,j,k+1} - \boldsymbol{x}_{i,j,k}) \times (\boldsymbol{x}_{i+1,j,k} - \boldsymbol{x}_{i,j,k+1}) \ \text{(adhe)},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{i+1,j+1,k+1} - \boldsymbol{x}_{i,j+1,k}) \times (\boldsymbol{x}_{i+1,j+1,k} - \boldsymbol{x}_{i,j+1,k+1}) \ \text{(bcgf)},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{i,j,k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{i+1,j+1,k} - \boldsymbol{x}_{i,j,k}) \times (\boldsymbol{x}_{i,j+1,k} - \boldsymbol{x}_{i+1,j,k}) \ \text{(abfe)},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{i+1,j+1,k+1} - \boldsymbol{x}_{i,j,k+1}) \times (\boldsymbol{x}_{i,j+1,k+1} - \boldsymbol{x}_{i+1,j,k+1}) \ \text{(dcgh)}.$$

在上面的关系式中,面积是矢量.为了方便,记

$$\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{2}(\Omega_{i,j,k} + \Omega_{i+1,j,k}),$$

$$\Omega_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2}(\Omega_{i,j,k} + \Omega_{i,j+1,k}),$$

$$\Omega_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\Omega_{i,j,k} + \Omega_{i,j,k+1}),$$

$$\boldsymbol{n}^{(\cdot)} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{(\cdot)}}{\Omega_{(\cdot)}},$$

$$\Sigma_{(\cdot)} = |\boldsymbol{\Sigma}_{(\cdot)}|.$$

这里,矢量 $\boldsymbol{n}^{(\cdot)}$并非为单位矢量,它的三个分量记为:$n_x^{(\cdot)}, n_y^{(\cdot)}, n_z^{(\cdot)}$.

由于在一般情况下网格单元属于任意六面体,各面上的四个角点可能不一定在一个平面内.六面体的体积可以按下面公式计算.

首先由高斯公式得

$$\oint_{\Sigma} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\Sigma = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{x}) \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega = \Omega.$$

因此

$$\begin{aligned}\Omega_{i,j,k} = &\boldsymbol{\Sigma}_{i+\frac{1}{2},j,k} \cdot \boldsymbol{x}^{(c)}_{i+\frac{1}{2},j,k} - \boldsymbol{\Sigma}_{i-\frac{1}{2},j,k} \cdot \boldsymbol{x}^{(c)}_{i-\frac{1}{2},j,k} \\ &+ \boldsymbol{\Sigma}_{i,j+\frac{1}{2},k} \cdot \boldsymbol{x}^{(c)}_{i,j+\frac{1}{2},k} - \boldsymbol{\Sigma}_{i,j-\frac{1}{2},k} \cdot \boldsymbol{x}^{(c)}_{i,j-\frac{1}{2},k} \\ &+ \boldsymbol{\Sigma}_{i,j,k+\frac{1}{2}} \cdot \boldsymbol{x}^{(c)}_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{\Sigma}_{i,j,k-\frac{1}{2}} \cdot \boldsymbol{x}^{(c)}_{i,j,k-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

这里,$\boldsymbol{x}^{(c)}$为所处面的中心坐标,按下面方式计算

$$\boldsymbol{x}^{(c)}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{x}_{i+1,j,k} + \boldsymbol{x}_{i+1,j+1,k} + \boldsymbol{x}_{i+1,j+1,k+1} + \boldsymbol{x}_{i+1,j,k+1}),$$

$$\boldsymbol{x}^{(c)}_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{x}_{i,j+1,k} + \boldsymbol{x}_{i+1,j+1,k} + \boldsymbol{x}_{i+1,j+1,k+1} + \boldsymbol{x}_{i,j+1,k+1}),$$

$$\boldsymbol{x}^{(c)}_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{x}_{i,j,k+1} + \boldsymbol{x}_{i+1,j,k+1} + \boldsymbol{x}_{i+1,j+1,k+1} + \boldsymbol{x}_{i,j+1,k+1}).$$

有限体积法有两种类型:格心法和格点法.在格心法中,数值解定义在网格单元的中心 $c_{i,j,k}$,用下面的针对网格单元的平均值定义

$$W_{i,j,k} = \frac{1}{\Omega_{i,j,k}} \int_{\Omega_{i,j,k}} W \mathrm{d}\Omega. \tag{6.13}$$

在格点法中,数值解定义在网格节点(即网格单元角点)上.这里主要考虑格心法.图6.11用二维情况说明格心法的定义.

在标准有限体积法中,将积分方程(6.12)用下面关系式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Omega_{i,j,k} W_{i,j,k}) + \sum_{\text{sides}} \boldsymbol{\Phi}^* \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \Omega_{i,j,k} S_{i,j,k} \tag{6.14}$$

代替.也可以通过定义

$$\overline{W}_{i,j,k} = \Omega_{i,j,k} W_{i,j,k},$$

$$\bar{S}_{i,j,k} = \Omega_{i,j,k} S_{i,j,k},$$

将格式(6.14)写成与有限差分法(6.9)相同的形式

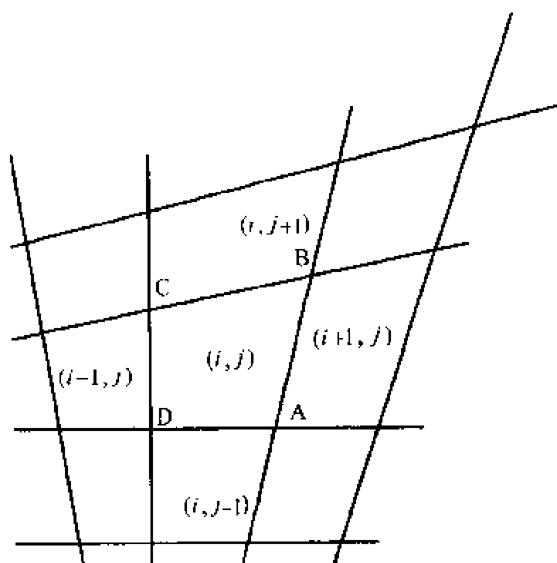


图 6.11　格心法

未知数定义在网格(控制容积)ABCD 的中点(i,j)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{W}_{i,j,k}+\sum_{\text{sides}}\Phi^*_{\text{sides}}=\bar{S}_{i,j,k}.\tag{6.15}$$

这里

$$\sum_{\text{sides}}\Phi^*_{\text{sides}}=F^*_{i+\frac{1}{2},j,k}-F^*_{i-\frac{1}{2},j,k}+G^*_{i,j+\frac{1}{2},k}-G^*_{i,j-\frac{1}{2},k}+H^*_{i,j,k+\frac{1}{2}}-H^*_{i,j,k-\frac{1}{2}}.$$

在上式中,$F^*_{i+\frac{1}{2},j,k}$,$G^*_{i,j+\frac{1}{2},k}$和$H^*_{i,j,k+\frac{1}{2}}$分别称为 i,j 和k 方向的数值通量

$$F^*_{i+\frac{1}{2},j,k}=\boldsymbol{\Phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}\cdot\boldsymbol{\Sigma}_{i+\frac{1}{2},j,k}=\Phi^{(n)}_{i+\frac{1}{2},j,k},$$
$$G^*_{i,j+\frac{1}{2},k}=\boldsymbol{\Phi}_{i,j+\frac{1}{2},k}\cdot\boldsymbol{\Sigma}_{i,j+\frac{1}{2},k}=\Phi^{(n)}_{i,j+\frac{1}{2},k},$$
$$H^*_{i,j,k+\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\Phi}_{i,j,k+\frac{1}{2}}\cdot\boldsymbol{\Sigma}_{i,j,k+\frac{1}{2}}=\Phi^{(n)}_{i,j,k+\frac{1}{2}}.$$

这里

$$\Phi^{(n)}_{(\cdot)}=\Omega_{(\cdot)}(W_{(\cdot)}n^{(\cdot)}_t+F_{(\cdot)}n^{(\cdot)}_x+G_{(\cdot)}n^{(\cdot)}_y+H_{(\cdot)}n^{(\cdot)}_z).\tag{6.16}$$

上式中,$n^{(\cdot)}_t=-\boldsymbol{V}_\Sigma\cdot\boldsymbol{n}^{(\cdot)}$.

在本节稍远的地方,我们会用具体的例子说明如何计算 $\Phi^{(n)}_{(\cdot)}$中的无粘部分.对于粘性部分,先用数值方法计算速度的偏导数和温度的偏导数,代入粘性通量表达式便得数值通量中的粘性部分.这些偏导数的计算有两种方法.以二阶精度计算为例:

1)插值微分法.例如,为了计算网格单元(i,j,k)的右表面$(i+\frac{1}{2},j,k)$上的平均偏导数 ϕ_x,ϕ_y,ϕ_z,可以令

$$\phi=a+bx+cy+dz,$$

然后利用下面的 12 个已知的网格单元中心的值

$$\phi_{i,j+\alpha,k+\beta},\phi_{i+1,j+\alpha,k+\beta},\alpha=\pm1,\beta=\pm1,$$

和最小二乘法定出系数 a,b,c 和d,然后令 $\phi_x=b$,$\phi_y=c$,$\phi_z=d$.也可以构造其他近似

方法确定这些偏导数.

2)积分法. 例如,为了计算网格单元(i,j,k)的右表面$(i+\frac{1}{2},j,k)$(其他表面可以用类似方法获得)上的平均偏导数ϕ_x,ϕ_y,ϕ_z,构造以右表面$(i+\frac{1}{2},j,k)$中心为中心的控制体积$\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}$,于是

$$(\phi_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}=\frac{1}{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}}\int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}}\phi_x\mathrm{d}\Omega,$$

$$(\phi_y)_{i+\frac{1}{2},j,k}=\frac{1}{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}}\int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}}\phi_y\mathrm{d}\Omega,$$

$$(\phi_z)_{i+\frac{1}{2},j,k}=\frac{1}{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}}\int_{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}}\phi_z\mathrm{d}\Omega.$$

令

$$\boldsymbol{\theta}=\begin{cases}(\phi,0,0) & \text{对于 } \phi_x,\\(0,\phi,0) & \text{对于 } \phi_y,\\(0,0,\phi) & \text{对于 } \phi_z.\end{cases}$$

由高斯定理

$$\int_\Omega\nabla\cdot\boldsymbol{\theta}\mathrm{d}\Omega=\oint_\Sigma\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Sigma,$$

得

$$(\phi_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}=\oint_{\Sigma^{(i+\frac{1}{2},j,k)}}\phi\boldsymbol{e}_x\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma},$$

$$(\phi_y)_{i+\frac{1}{2},j,k}=\oint_{\Sigma^{(i+\frac{1}{2},j,k)}}\phi\boldsymbol{e}_y\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma},$$

$$(\phi_z)_{i+\frac{1}{2},j,k}=\oint_{\Sigma^{(i+\frac{1}{2},j,k)}}\phi\boldsymbol{e}_z\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}.$$

这里$\Sigma^{(i+\frac{1}{2},j,k)}$为$\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}$的边界. 一般把$\Omega_{i,j,k}$和$\Omega_{i+1,j,k}$各取靠近网格面$i+\frac{1}{2},j,k$的一半以构造$\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}$. 于是$\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}$也为六面体,其左右上下远近六个面的面积分别为

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{左面}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Sigma}_{i-\frac{1}{2},j,k}+\boldsymbol{\Sigma}_{i+\frac{1}{2},j,k}),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{右面}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Sigma}_{i+\frac{1}{2},j,k}+\boldsymbol{\Sigma}_{i+\frac{3}{2},j,k}),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{下面}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Sigma}_{i,j-\frac{1}{2},k}+\boldsymbol{\Sigma}_{i+1,j-\frac{1}{2},k}),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{上面}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Sigma}_{i,j+\frac{1}{2},k}+\boldsymbol{\Sigma}_{i+1,j+\frac{1}{2},k}),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{远面}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Sigma}_{i,j,k-\frac{1}{2}}+\boldsymbol{\Sigma}_{i+1,j,k-\frac{1}{2}}),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{近面}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Sigma}_{i,j,k+\frac{1}{2}}+\boldsymbol{\Sigma}_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}).$$

在六个面上 ϕ 的平均值为

$$\phi_{左面} = \phi_{i,j,k},$$

$$\phi_{右面} = \phi_{i+1,j,k},$$

$$\phi_{下面} = \frac{\Omega_{i,j-1,k}\phi_{i,j-1,k} + \Omega_{i+1,j-1,k}\phi_{i+1,j-1,k} + \Omega_{i,j,k}\phi_{i,j,k} + \Omega_{i+1,j,k}\phi_{i+1,j,k}}{\Omega_{i,j-1,k} + \Omega_{i+1,j-1,k} + \Omega_{i,j,k} + \Omega_{i+1,j,k}},$$

$$\phi_{上面} = \frac{\Omega_{i,j+1,k}\phi_{i,j+1,k} + \Omega_{i+1,j+1,k}\phi_{i+1,j+1,k} + \Omega_{i,j,k}\phi_{i,j,k} + \Omega_{i+1,j,k}\phi_{i+1,j,k}}{\Omega_{i,j+1,k} + \Omega_{i+1,j+1,k} + \Omega_{i,j,k} + \Omega_{i+1,j,k}},$$

$$\phi_{远面} = \frac{\Omega_{i,j,k-1}\phi_{i,j,k-1} + \Omega_{i+1,j,k-1}\phi_{i+1,j,k-1} + \Omega_{i,j,k}\phi_{i,j,k} + \Omega_{i+1,j,k}\phi_{i+1,j,k}}{\Omega_{i,j,k-1} + \Omega_{i+1,j,k-1} + \Omega_{i,j,k} + \Omega_{i+1,j,k}},$$

$$\phi_{近面} = \frac{\Omega_{i,j,k+1}\phi_{i,j,k+1} + \Omega_{i+1,j,k+1}\phi_{i+1,j,k+1} + \Omega_{i,j,k}\phi_{i,j,k} + \Omega_{i+1,j,k}\phi_{i+1,j,k}}{\Omega_{i,j,k+1} + \Omega_{i+1,j,k+1} + \Omega_{i,j,k} + \Omega_{i+1,j,k}}.$$

于是

$$\begin{aligned}
(\phi_x)_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \oint_{\Sigma^{(i+\frac{1}{2},j,k)}} \phi e_x \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} \\
&= \phi_{右面}\boldsymbol{\Sigma}_{右面}\cdot \boldsymbol{e}_x - \phi_{左面}\boldsymbol{\Sigma}_{左面}\cdot \boldsymbol{e}_x \\
&\quad + \phi_{上面}\boldsymbol{\Sigma}_{上面}\cdot \boldsymbol{e}_x - \phi_{下面}\boldsymbol{\Sigma}_{下面}\cdot \boldsymbol{e}_x \\
&\quad + \phi_{近面}\boldsymbol{\Sigma}_{近面}\cdot \boldsymbol{e}_x - \phi_{远面}\boldsymbol{\Sigma}_{远面}\cdot \boldsymbol{e}_x, \\
(\phi_y)_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \oint_{\Sigma^{(i+\frac{1}{2},j,k)}} \phi e_y \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} \\
&= \phi_{右面}\boldsymbol{\Sigma}_{右面}\cdot \boldsymbol{e}_y - \phi_{左面}\boldsymbol{\Sigma}_{左面}\cdot \boldsymbol{e}_y \\
&\quad + \phi_{上面}\boldsymbol{\Sigma}_{上面}\cdot \boldsymbol{e}_y - \phi_{下面}\boldsymbol{\Sigma}_{下面}\cdot \boldsymbol{e}_y \\
&\quad + \phi_{近面}\boldsymbol{\Sigma}_{近面}\cdot \boldsymbol{e}_y - \phi_{远面}\boldsymbol{\Sigma}_{远面}\cdot \boldsymbol{e}_y, \\
(\phi_z)_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \oint_{\Sigma^{(i+\frac{1}{2},j,k)}} \phi e_z \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} \\
&= \phi_{右面}\boldsymbol{\Sigma}_{右面}\cdot \boldsymbol{e}_z - \phi_{左面}\boldsymbol{\Sigma}_{左面}\cdot \boldsymbol{e}_z \\
&\quad + \phi_{上面}\boldsymbol{\Sigma}_{上面}\cdot \boldsymbol{e}_z - \phi_{下面}\boldsymbol{\Sigma}_{下面}\cdot \boldsymbol{e}_z \\
&\quad + \phi_{近面}\boldsymbol{\Sigma}_{近面}\cdot \boldsymbol{e}_z - \phi_{远面}\boldsymbol{\Sigma}_{远面}\cdot \boldsymbol{e}_z.
\end{aligned}$$

为了计算网格单元(i,j,k)的上表面$(i,j+\frac{1}{2},k)$上的平均偏导数 ϕ_x,ϕ_y,ϕ_z，构造以上表面$(i,j+\frac{1}{2},k)$中心为中心的控制体积 $\Omega_{i,j+\frac{1}{2},k}$把$\Omega_{i,j,k}$和$\Omega_{i,j+1,k}$各取靠近网格面 $i,j+\frac{1}{2},k$ 的一半以构造$\Omega_{i,j+\frac{1}{2},k}$. 为了计算网格单元$(i,j,k)$的近表面$(i,j,k+\frac{1}{2})$上的平均偏导数 ϕ_x,ϕ_y,ϕ_z，构造以近表面$(i,j,k+\frac{1}{2})$中心为中心的控制体积 $\Omega_{i,j,k+\frac{1}{2}}$，把$\Omega_{i,j,k}$和$\Omega_{i,j,k+1}$各取靠近网格面 $i,j,k+\frac{1}{2}$的一半以构造 $\Omega_{i,j,k+\frac{1}{2}}$. 余下的步骤与上面的计算类似.

下面针对二维问题简单介绍格点方法，控制容积 Ω_J 的选择可以具有一定的自由度，可以具有任意扭曲形状. 在图 6.12 中标识了一个四边形控制容积 ABCD. 积分 $\int_{\Omega_J} W\mathrm{d}\Omega_J$

可以近似为：

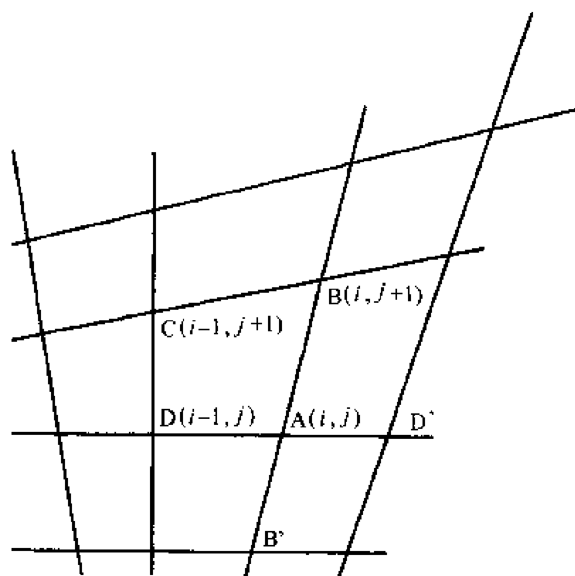


图 6.12　格点格式

未知数定义在网格(控制容积)ABCD 的角点(i, j)上

$$\int_{\Omega_j} W \mathrm{d}\Omega_j = \frac{1}{4}(W_A + W_B + W_C + W_D).$$

通过边界 AB 的数值通量可以用下式计算

$$\boldsymbol{\Phi}_{AB}^{*} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{AB} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Phi}_{A}^{*} + \boldsymbol{\Phi}_{B}^{*}) \cdot (y_{AB}, -x_{AB}).$$

格点法一般比格心法的精度高.

6.2.4　高维问题时间积分

即使一维问题的某全离散格式具有唯一形式,其高维推广可以有多种替代形式.

考虑 d 维守恒系统

$$w_t + \sum_{p=1}^{d} f_{x_p}^{(p)} = 0. \tag{6.17}$$

6.2.4.1　时空独立处理法

考虑(6.17)的二层显示格式

$$\Delta w_j = k \sum_{p=1}^{d} E_{x_p} f_j. \tag{6.18}$$

这里,E_{x_p} 为 x_p 方向的差分算子.

格式(6.18)可以直接求解.如果采用空间分裂(分步处理),则格式更稳定.最简单的分裂为

$$
\begin{aligned}
w_j^{n+1,1} &= w_j^n + kE_{x_1} f_j,\\
w_j^{n+1,2} &= w_j^{n+1,1} + kE_{x_2} f_j^{(1)},\\
&\vdots\\
w_j^{n+1,d} &= w_j^{n+1,d-1} + kE_{x_{d-1}} f_j^{(d-1)},\\
w_j^{n+1} &= w_j^{n-1,d}.
\end{aligned}
$$

这里 $f_j^{(p)} = f(w_j^{n+1,p})_j$.

如果将格式写成算子形式

$$
w_j^{n+1} = (I + k\sum_{p=1}^{d} \bar{E}_{x_p}) w_j^n.
$$

(这里 I 为单位算子,$\bar{E}_{x_p} w_j^n = E_{x_p} f_j$),则分裂格式可以写成下面更为紧凑的形式

$$
w_j^{n+1} = \prod_{p=1}^{d} (I + k\bar{E}_{x_p}) w_j^n = \prod_{p=1}^{d} S_{x_p}(k) w_j^n.
$$

这里 $S_{x_p}(k) = I + k\bar{E}_{x_p}$.

如果使用 Strang 方法,便可获得对称分裂.对于二维问题,采用对称分裂得

$$
w_j^{n+1} = S_{x_2}\left(\frac{k}{2}\right) S_{x_1}\left(\frac{k}{2}\right) S_{x_1}\left(\frac{k}{2}\right) S_{x_2}\left(\frac{k}{2}\right) w_j^n.
$$

6.2.4.2　Lax-Wendroff 方法

使用 Lax-Wendroff 方法,有

$$
w(t+k) - w(t) = kw_t + \frac{1}{2}k^2 w_{tt} + O[k^3]. \tag{6.19}
$$

利用偏微分方程,可以建立下面的时空导数关系式

$$
\begin{aligned}
w_t &= -\sum_{p=1}^{d} f_{x_p}^{(p)},\\
w_{tt} &= -\sum_{p=1}^{d} f_{tx_p}^{(p)} = -\sum_{p=1}^{d} (A_p w_t)_{x_p} = \sum_{p=1}^{d} (A_p \sum_{q=1}^{d} f_{x_q}^{(q)})_{x_p}.
\end{aligned}
$$

这里 $A_p = f_w^{(p)}$.

将上述关系式代入(6.19)并忽略三阶以上的项,便得到如下的半离散 Lax-Wendroff 格式

$$
w^{n+1} - w^n = -k\sum_{p=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_p}\left(f^{(p)} - \frac{k}{2} A_p \sum_{q=1}^{d} f_{x_q}^{(q)}\right). \tag{6.20}
$$

该格式也可以写成预估-校正形式

$$
\begin{aligned}
\Delta\tilde{w} &= -k\sum_{q=1}^{d} f_{x_q}^{(q)},\\
f^{n+\frac{1}{2}} &= f^{(p)} + \frac{1}{2} A_p \Delta\tilde{w},\\
\Delta w^{\exp} &= w(t+k) - w(t) = -k\sum_{p=1}^{d} \tilde{f}_{x_p}^{(p)}.
\end{aligned}
$$

Lax-Wendroff 全离散格式有两种著名形式.在介绍它们之前,引入下面的记号

$$\phi_{j+e_p} = \phi(x_1, x_2, \cdots, x_p + h^{(p)}, \cdots, x_d),$$

$$\phi_{j+\frac{1}{2}e_p} = \phi(x_1, x_2, \cdots, x_p + \frac{1}{2}h^{(p)}, \cdots, x_d),$$

$$(\delta_p\phi)_{j+\frac{1}{2}e_p} = \phi_{j+e_p} - \phi_j,$$

$$(\delta_p\phi)_j = \phi_{j+\frac{1}{2}e_p} - \phi_{j-\frac{1}{2}e_p},$$

$$(\mu_p\phi)_{j+\frac{1}{2}e_p} = \frac{1}{2}(\phi_{j+e_p} + \phi_j),$$

$$(\mu_p\phi)_j = \frac{1}{2}(\phi_{j+e_p} + \phi_{j-e_p}),$$

$$\phi_{j+\left(\frac{1}{2}\right)} = \phi(x_1 + \frac{1}{2}h^{(1)}, x_2 + \frac{1}{2}h^{(2)}, \cdots, x_d + \frac{1}{2}h^{(d)}).$$

Ni 格式 该格式中,预估值定义在网格角点上,具体表达式为

$$(\Delta\widetilde{w})_{j+\left(\frac{1}{2}\right)} = -k\left[\sum_{p=1}^{d}\left(\prod\nolimits_{q\neq p}\mu_q\right)\frac{\delta_p f^{(p)}}{h^{(p)}}\right]_{j+\left(\frac{1}{2}\right)};$$

$$(\widetilde{f^{(p)}})_{j+\left(\frac{1}{2}\right)} = \left[\left(\prod\nolimits_q\mu_q\right)f^{(p)} + \frac{1}{2}\left(\prod\nolimits_q\mu_q\right)A_p\Delta\widetilde{w}\right]_{j+\left(\frac{1}{2}\right)}, p = 1,2,\cdots,d;$$

$$\Delta w_j^{\exp} = -k\left[\sum_{p=1}^{d}\left(\prod\nolimits_{q\neq p}\mu_q\right)\frac{\delta_p\widetilde{f}^{(p)}}{h^{(p)}}\right]_j.$$

在该格式中必需添加人工黏性以保证稳定.

Lerat 格式 在该格式中,预估值定义在网格单元的边界上:

$$(\Delta\widetilde{w})_{j+\frac{1}{2}e_p} = -k\left[\frac{\delta_p f^{(p)}}{h^{(p)}} + \sum_{q\neq p}\mu_q\mu_p\frac{\delta_p f^{(q)}}{h^{(q)}}\right]_{j+\frac{1}{2}e_p}, p = 1,2,\cdots,d;$$

$$(\widetilde{f^{(p)}})_{j+\frac{1}{2}e_p} = \left[\mu_p f^{(p)} + \frac{1}{2}\mu_p A_p\Delta\widetilde{w}\right]_{j+\frac{1}{2}e_p}, p = 1,2,\cdots,d;$$

$$\Delta w_j^{\exp} = -k\left(\sum_{p=1}^{d}\frac{\delta_p\widetilde{f}^{(p)}}{h^{(p)}}\right)_j.$$

因此,预估步的个数等于空间的维数,从而计算量高于 Ni 格式的计算量.然而,Lerat 格式内含足够的数值黏性,不用人工黏性也稳定.

6.2.4.3 隐式方法

高维问题的隐式格式一般具有下面形式

$$\left(I + k\sum_{p=1}^{d}I_{x_p}\right)\Delta w_j = \Delta w_j^{\exp}. \tag{6.21}$$

这里,I_{x_p} 为 x_p 方向的隐式算子,$\Delta w_j^{\exp}$ 为格式的显式部分所计算的值.

如果直接对上述隐式格式求解,则计算量较大.在 *ADI*(交替方向隐式)方法(也称近似 ADI 分解)中,隐式部分可以分解成一维隐式算子的积

$$\prod_{p=1}^{d}(I+kI_{x_p})\Delta w_j=\Delta w_j^{\exp},$$

相当于 d 步一维运算

$$\begin{aligned}
&(I+kI_{x_1})\Delta w_j^{(1)}=\Delta w_j^{\exp},\\
&(I+kI_{x_2})\Delta w_j^{(2)}=\Delta w_j^{(1)},\\
&\vdots\\
&(I+kI_{x_d})\Delta w_j^{(d)}=\Delta w_j^{(d-1)},\\
&\Delta w_j=\Delta w_j^{(d)}.
\end{aligned}$$

ADI 方法会降低非定常问题的时间精度和定常问题的收敛速度.为了克服这些缺点,可以采用松弛方法求逆.

6.2.5　N-S 方程的几种具体格式

在前面介绍的有限差分和有限体积法中,还需要计算 $\Phi_{(\cdot)}^{(n)}$(见定义(6.10)和(6.16)).

通过比较(6.10)和(6.16)以及(6.9)和(6.14),不难发现计算坐标系中的有限差分法和物理坐标系中的有限体积法十分类似.如果令

$$\begin{aligned}
&J_{(\cdot)}=\Omega_{(\cdot)},\\
&(\xi_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}=\frac{\boldsymbol{\Sigma}_{i+\frac{1}{2},j,k}\cdot\boldsymbol{e}_x}{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}},\\
&(\xi_y)_{i+\frac{1}{2},j,k}=\frac{\boldsymbol{\Sigma}_{i+\frac{1}{2},j,k}\cdot\boldsymbol{e}_y}{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}},\\
&(\xi_z)_{i+\frac{1}{2},j,k}=\frac{\boldsymbol{\Sigma}_{i+\frac{1}{2},j,k}\cdot\boldsymbol{e}_z}{\Omega_{i+\frac{1}{2},j,k}},\\
&(\eta_x)_{i,j+\frac{1}{2},k}=\frac{\boldsymbol{\Sigma}_{i,j+\frac{1}{2},k}\cdot\boldsymbol{e}_x}{\Omega_{i,j+\frac{1}{2},k}},\\
&(\eta_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}=\frac{\boldsymbol{\Sigma}_{i,j+\frac{1}{2},k}\cdot\boldsymbol{e}_y}{\Omega_{i,j+\frac{1}{2},k}},\\
&(\eta_z)_{i,j+\frac{1}{2},k}=\frac{\boldsymbol{\Sigma}_{i,j+\frac{1}{2},k}\cdot\boldsymbol{e}_z}{\Omega_{i,j+\frac{1}{2},k}},\\
&(\zeta_x)_{i,j,k+\frac{1}{2}}=\frac{\boldsymbol{\Sigma}_{i,j,k+\frac{1}{2}}\cdot\boldsymbol{e}_x}{\Omega_{i,j,k+\frac{1}{2}}},\\
&(\zeta_y)_{i,j,k+\frac{1}{2}}=\frac{\boldsymbol{\Sigma}_{i,j,k+\frac{1}{2}}\cdot\boldsymbol{e}_y}{\Omega_{i,j,k+\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

$$(\zeta_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{i,j,k+\frac{1}{2}} \cdot \boldsymbol{e}_z}{\Omega_{i,j,k+\frac{1}{2}}}.$$

则两者几乎完全等价,尤其是数值通量的表达式几乎完全一样.

尽管如此,两者还是存在如下差别:

1)有限差分法中的数值解是当地值,而有限体积法中的数值解是控制体积中的平均值.二者在二阶精度范围内是相等的.一旦获得了这些数值解,很少对二者再进行区别.

2)假设使用同样的格式.对于特别规则均匀的网格,有限差分法和有限体积法具有同样的精度;如果网格十分不规则,有限差分法的精度因坐标变换函数的计算遇到不连续情况而比有限体积方法低.

3)对于较均匀的网格,如果坐标变换函数的计算能具有高精度,那么有限差分法可以(通过多点格式或紧致格式)获得高精度;但对于有限体积法很难获得二阶以上的高精度.

4)在构造无黏部分的数值通量用到插值时,有限差分法可以用一个方向的插值从而使用限制器时可以照搬一维问题的方法,而有限体积法中则较麻烦.例如,如果用带限制器的线性插值和 MUSCL 方法构造数值通量,则有限体积法的插值应该使用高维插值,而有限差分法可以使用(沿网格线方向的)一维插值.

为了在构造数值通量时方便利用一维结果,对有限体积法可以采用两步插值方法.假设在每个方向上采用 5 点格式.考虑网格单元(i,j,k)右表面$(i+\frac{1}{2},j,k)$的数值通量.用 MUSCL 方法构造时需要知道网格面$(i+\frac{1}{2},j,k)$的左右流动参数

$$\phi^{(L)}_{i+\frac{1}{2},j,k}, \quad \phi^{(R)}_{i+\frac{1}{2},j,k}.$$

首先,在网格面中点的法线方向设 4 个虚点,在网格面左右两端各有 2 个虚点并关于网格面中点左右对称,相邻两虚点的距离近似等于网格在该方向上的间距

$$\boldsymbol{h}^{(x)}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{2}(\Omega_{i,j,k} + \Omega_{i+1,j,k}) \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{i+\frac{1}{2},j,k}}{\Sigma^2_{i+\frac{1}{2},j,k}}.$$

从左到右这些虚点的坐标为

$$\boldsymbol{x}^{(L)}_{\text{far}} = \boldsymbol{x}^{(c)}_{i+\frac{1}{2},j,k} - \frac{3}{2}\boldsymbol{h}^{(x)}_{i+\frac{1}{2},j,k},$$

$$\boldsymbol{x}^{(L)}_{\text{near}} = \boldsymbol{x}^{(c)}_{i+\frac{1}{2},j,k} - \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^{(x)}_{i+\frac{1}{2},j,k},$$

$$\boldsymbol{x}^{(R)}_{\text{far}} = \boldsymbol{x}^{(c)}_{i+\frac{1}{2},j,k} + \frac{3}{2}\boldsymbol{h}^{(x)}_{i+\frac{1}{2},j,k},$$

$$\boldsymbol{x}^{(R)}_{\text{near}} = \boldsymbol{x}^{(c)}_{i+\frac{1}{2},j,k} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^{(x)}_{i+\frac{1}{2},j,k}.$$

第一步插值为用任何(不带限制器的)三线性或更高阶插值获得各虚点($\boldsymbol{x}^{(L)}_{\text{far}}, \boldsymbol{x}^{(L)}_{\text{near}}, \boldsymbol{x}^{(R)}_{\text{far}}, \boldsymbol{x}^{(R)}_{\text{near}}$)上的流动参数.第二步把各虚点看成一维网格,用第四章介绍的一维 MUSCL 方法构造网格面中点的数值通量.

有了上述认识,下面只对有限差分方法介绍两种具体格式的数值通量.

半离散差分格式写成如下形式

$$\frac{\mathrm{d}\overline{W}_{i,j,k}}{\mathrm{d}t} = D_{i,j,k} = D^{(E)}_{i,j,k} + \frac{1}{2}D^{(V)}_{i,j,k},$$

$$D^{(E)}_{i,j,k} = \overline{F}^{(E)}_{i-\frac{1}{2},j,k} - \overline{F}^{(E)}_{i+\frac{1}{2},j,k} + \overline{G}^{(E)}_{i,j-\frac{1}{2},k} - \overline{G}^{(E)}_{i,j+\frac{1}{2},k} + \overline{H}^{(E)}_{i,j,k-\frac{1}{2}} - \overline{H}^{(E)}_{i,j,k+\frac{1}{2}},$$

$$D^{(V)}_{i,j,k} = \overline{F}^{(V)}_{i-1,j,k} - \overline{F}^{(V)}_{i+1,j,k} + \overline{G}^{(V)}_{i,j-1,k} - \overline{G}^{(V)}_{i,j+1,k} + \overline{H}^{(V)}_{i,j,k-1} - \overline{H}^{(E)}_{i,j,k+1}.$$

黏性部分的计算已经在前面介绍了,这里只考虑无黏部分的计算.

下面仅以

$$\overline{F}^{(E)} = J(\xi_t W + \xi_x F^{(E)} + \xi_y G^{(E)} + \xi_z H^{(E)}) \tag{6.22}$$

项的处理为例说明,其余项的处理与之完全类似. 两个格式分别为 Steger-Warming 格式与 Roe 格式.

为方便起见,省略 $\overline{F}^{(E)}$的上标,即用 $\overline{F}$ 代替$\overline{F}^{(E)}$,且引入如下记号:

$$k_x = \xi_x, k_y = \xi_y, k_z = \xi_z; \tag{6.23}$$

$$\theta = k_x u + k_y v + k_z w + \xi_t; \tag{6.24}$$

$$\phi^2 = \frac{\bar{\gamma}}{2}(u^2 + v^2 + w^2), \bar{\gamma} = \gamma - 1; \tag{6.25}$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}; \tag{6.26}$$

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}; \tag{6.27}$$

$$\bar{k}_x = \frac{k_x}{k}, k_y = \frac{k_y}{k}, \bar{k}_z = \frac{k_z}{k}; \tag{6.28}$$

$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{k}. \tag{6.29}$$

6.2.5.1　Steger-Warming 格式

由双曲性质可知,$\overline{F}$ 的雅可比矩阵N_1 可以对角化,从 $\det(N_1 - \lambda I) = 0$ 得到 N_1 的特征值如下:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \theta, \tag{6.30}$$

$$\lambda_4 = \theta + ak, \tag{6.31}$$

$$\lambda_5 = \theta - ak, \tag{6.32}$$

记 $\Lambda = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$, R 为N_1 右特征矩阵 $N_1 R = \Lambda R$,则有

$$N_1 = R\Lambda R^{-1}, \tag{6.33}$$

$$\bar{F} = R\Lambda R^{-1}\overline{W}. \tag{6.34}$$

将通量函数按特征值进行线性展开

$$\overline{F} = (\bar{f}_1, f_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4, \bar{f}_5)^T,$$

$$\bar{f}_1 = J\rho[\lambda_1 - (2\lambda_1 - \lambda_4 - \lambda_5)\frac{1}{2\gamma}],$$

$$\bar{f}_2 = J\rho[\lambda_1 u + (\lambda_4 - \lambda_5)\frac{\bar{k}_x a}{2\gamma} - (2\lambda_1 - \lambda_4 - \lambda_5)\frac{u}{2\gamma}],$$

$$\bar{f}_3 = J\rho[\lambda_1 v + (\lambda_4 - \lambda_5)\frac{\bar{k}_y a}{2\gamma} - (2\lambda_1 - \lambda_4 - \lambda_5)\frac{v}{2\gamma}],$$

$$\bar{f}_4 = J\rho[\lambda_1 w + (\lambda_4 - \lambda_5)\frac{\bar{k}_z a}{2\gamma} - (2\lambda_1 - \lambda_4 - \lambda_5)\frac{w}{2\gamma}],$$

$$\bar{f}_5 = J\rho[\lambda_1 E + (\lambda_4 - \lambda_5)\frac{\bar{\theta} a}{2\gamma} - (2\lambda_1 - \lambda_4 - \lambda_5)\frac{\phi^2 + a^2}{2\gamma\bar{\gamma}}].$$

特征值对角矩阵可以分裂为

$$\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^-,$$
$$\Lambda^+ = \mathrm{diag}(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \lambda_3^+, \lambda_4^+, \lambda_5^+),$$
$$\Lambda^- = \mathrm{diag}(\lambda_1^-, \lambda_2^-, \lambda_3^-, \lambda_4^-, \lambda_5^-),$$
$$\lambda_i^+ = \frac{1}{2}(\lambda_i + (\lambda_i^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}), i = 1,2,3,4,5,$$
$$\lambda_i^- = \frac{1}{2}(\lambda_i - (\lambda_i^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}), i = 1,2,3,4,5.$$

其中 ε 为小参数,用于避免在音速点出现没有意义的膨胀激波.

从矩阵分裂得通量函数分裂如下

$$\bar{F}^+ = A^+ \bar{W} = R\Lambda^+ R^{-1}\bar{W} = (\bar{f}_1^+, \bar{f}_2^+, \bar{f}_3^+, \bar{f}_4^+, \bar{f}_5^+)^t,$$

$$\bar{f}_1^+ = J\rho[\lambda_1^+ - (2\lambda_1^+ - \lambda_4^+ - \lambda_5^+)\frac{1}{2\gamma}],$$

$$\bar{f}_2^+ = J\rho[\lambda_1^+ u + (\lambda_4^+ - \lambda_5^+)\frac{\bar{k}_x a}{2\gamma} - (2\lambda_1^+ - \lambda_4^+ - \lambda_5^+)\frac{u}{2\gamma}],$$

$$\bar{f}_3^+ = J\rho[\lambda_1^+ v + (\lambda_4^+ - \lambda_5^+)\frac{\bar{k}_y a}{2\gamma} - (2\lambda_1^+ - \lambda_4^+ - \lambda_5^+)\frac{v}{2\gamma}],$$

$$\bar{f}_4^+ = J\rho[\lambda_1^+ w + (\lambda_4^+ - \lambda_5^+)\frac{\bar{k}_z a}{2\gamma} - (2\lambda_1^+ - \lambda_4^+ - \lambda_5^+)\frac{w}{2\gamma}],$$

$$\bar{f}_5^+ = J\rho[\lambda_1^+ E + (\lambda_4^+ - \lambda_5^+)\frac{\bar{\theta} a}{2\gamma} - (2\lambda_1^+ - \lambda_4^+ - \lambda_5^+)\frac{\phi^2 + a^2}{2\gamma\bar{\gamma}}],$$

$$\bar{F}^- = A^- \bar{W} = R\Lambda^- R^{-1}\bar{W} = (\bar{f}_1^-, \bar{f}_2^-, \bar{f}_3^-, \bar{f}_4^-, \bar{f}_5^-)^t,$$

$$\bar{f}_1^- = J\rho[\lambda_1^- - (2\lambda_1^- - \lambda_4^- - \lambda_5^-)\frac{1}{2\gamma}],$$

$$\bar{f}_2^- = J\rho[\lambda_1^- u + (\lambda_4^- - \lambda_5^-)\frac{\bar{k}_x a}{2\gamma} - (2\lambda_1^- - \lambda_4^- - \lambda_5^-)\frac{u}{2\gamma}],$$

$$\bar{f}_3^- = J\rho[\lambda_1^- v + (\lambda_4^- - \lambda_5^-)\frac{\bar{k}_y a}{2\gamma} - (2\lambda_1^- - \lambda_4^- - \lambda_5^-)\frac{v}{2\gamma}],$$

$$\bar{f}_4^- = J\rho[\lambda_1^- w + (\lambda_4^- - \lambda_5^-)\frac{\bar{k}_z a}{2\gamma} - (2\lambda_1^- - \lambda_4^- - \lambda_5^-)\frac{w}{2\gamma}],$$

$$\bar{f}_5^- = J\rho[\lambda_1^- E + (\lambda_4^- - \lambda_5^-)\frac{\bar{\theta} a}{2\gamma} - (2\lambda_1^- - \lambda_4^- - \lambda_5^-)\frac{\phi^2 + a^2}{2\gamma\bar{\gamma}}].$$

在 $\bar{F}^{(E)}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ 的表达式中,省略上标(E),则

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \bar{F}^{+}_{i-\frac{1}{2},j,k} + \bar{F}_{i+\frac{1}{2},j,k}, \tag{6.35}$$

$$\bar{F}^{+}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \bar{F}^{+}_{i,j,k} + \frac{1+\bar{\omega}}{4}\Delta_{i+\frac{1}{2},j,k}\bar{F}^{+} + \frac{1-\bar{\omega}}{4}\Delta_{i-\frac{1}{2},j,k}\bar{F}^{+}, \tag{6.36}$$

$$\bar{F}^{-}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \bar{F}^{-}_{i+1,j,k} - \frac{1+\bar{\omega}}{4}\Delta_{i+\frac{1}{2},j,k}\bar{F}^{-} - \frac{1-\bar{\omega}}{4}\Delta_{i+\frac{3}{2},j,k}\bar{F}^{-}. \tag{6.37}$$

这里 $\Delta_{i+\frac{1}{2},j,k}\bar{F} = F_{i+1,j,k} - F_{i,j,k}$ 为差分算子，$\bar{\omega}$ 为插值系数：

- $\bar{\omega} = -1$，完全迎风格式；
- $\bar{\omega} = 0$，Fromme 格式；
- $\bar{\omega} = 1$，三点中心差分格式；
- $\bar{\omega} = \frac{1}{3}$，三点迎风偏置格式.

为了在解间断处抑制数值震荡，需使用限制器，带限制器的数值通量表达式为

$$\bar{F}^{+}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \bar{F}^{+}_{i,j,k} + \frac{1+\bar{\omega}}{4}\bar{\Delta}_{i+\frac{1}{2},j,k}\bar{F}^{+} + \frac{1-\bar{\omega}}{4}\bar{\bar{\Delta}}_{i-\frac{1}{2},j,k}\bar{F}^{+}, \tag{6.38}$$

$$\bar{F}^{-}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \bar{F}^{-}_{i+1,j,k} - \frac{1+\bar{\omega}}{4}\bar{\bar{\Delta}}_{i+\frac{1}{2},j,k}\bar{F}^{-} - \frac{1-\bar{\omega}}{4}\bar{\Delta}_{i+\frac{3}{2},j,k}\bar{F}^{-}. \tag{6.39}$$

定义

$$1 \leqslant \omega \leqslant \frac{3-\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}},$$

则带限制器的斜率可以写成

$$\bar{\Delta}_{i+\frac{1}{2},j,k}\bar{F} = \Phi(\Delta_{i+\frac{1}{2},j,k}\bar{F}, \omega\Delta_{i-\frac{1}{2},j,k}\bar{F}),$$

$$\bar{\bar{\Delta}}_{i+\frac{1}{2},j,k}\bar{F} = \Phi(\Delta_{i+\frac{1}{2},j,k}\bar{F}, \omega\Delta_{i+\frac{3}{2},j,k}\bar{F}).$$

第四章 4.3.4 节给出了几种常见限制器 $\Phi(d_+, d_-)$.

6.2.5.2 Roe 格式

为了方便，省略上标 E，则

$$F_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{2}(F^{(L)}_{i+\frac{1}{2},j,k} + F^{(R)}_{i+\frac{1}{2},j,k}) + \frac{1}{2}\,|\,(N_1^{(Roe)})_{i+\frac{1}{2},j,k}\,|\,(W^{(L)}_{i+\frac{1}{2},j,k} - W^{(R)}_{i+\frac{1}{2},j,k}).$$

上式中，$W^{(L)}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ 和 $W^{(R)}_{i+\frac{1}{2},j,k}$ 为界面 $(i+\frac{1}{2},j,k)$ 左右的状态，由下面的 MUSCL 方法获得

$$W^{(L)}_{i+\frac{1}{2},j,k} = W_{i,j,k} + \frac{1+\bar{\omega}}{4}\Delta_{i+\frac{3}{2},j,k}W + \frac{1-\bar{\omega}}{4}\Delta_{i+\frac{1}{2},j,k}W,$$

$$W^{(R)}_{i+\frac{1}{2},j,k} = W_{i+1,j,k} - \frac{1+\bar{\omega}}{4}\Delta_{i+\frac{1}{2},j,k}W - \frac{1-\bar{\omega}}{4}\Delta_{i+\frac{3}{2},j,k}W.$$

这里 $\Delta_{i+\frac{1}{2},j,k}W = W_{i+1,j,k} - W_{i,j,k}$ 为差分算子，ω 为插值系数：

- $\omega = -1$，完全迎风格式；
- $\omega = 0$，Fromme 格式；

- $\bar{\omega}=1$,三点中心差分格式;
- $\bar{\omega}=\frac{1}{3}$,三点迎风偏置格式.

另外$(N_1^{(\mathrm{Roe})})_{i+\frac{1}{2},j,k}$为$N_1^{(L)}$和$N_1^{(R)}$的 Roe 平均. 令$N_1=N_1(\rho,u,v,w,H)$,则$(N_1^{(\mathrm{Roe})})_{i+\frac{1}{2},j,k}=N_1(\rho_{L/R},u_{L/R},v_{L/R},w_{L/R},H_{L/R})$. 因此,知道雅可比矩阵$N_1$的表达式,把自变量$\rho,u,v,w,H$换成$\rho_{L/R},u_{L/R},v_{L/R},w_{L/R},H_{L/R}$,即得 Roe 平均. 这里

$$\begin{aligned}
\rho_{L/R} &= \sqrt{\rho_L\rho_R},\\
u_{L/R} &= \frac{\sqrt{\rho_L}u_L+\sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L}+\sqrt{\rho_R}},\\
v_{L/R} &= \frac{\sqrt{\rho_L}v_L+\sqrt{\rho_R}v_R}{\sqrt{\rho_L}+\sqrt{\rho_R}},\\
w_{L/R} &= \frac{\sqrt{\rho_L}w_L+\sqrt{\rho_R}w_R}{\sqrt{\rho_L}+\sqrt{\rho_R}},\\
H_{L/R} &= \frac{\sqrt{\rho_L}H_L+\sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L}+\sqrt{\rho_R}}.
\end{aligned}$$

为了在解间断处抑制数值震荡,需使用限制器,带限制器的插值表达式为

$$W_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(L)} = W_{i,j,k}+\frac{1+\bar{\omega}}{4}\bar{\Delta}_{i+\frac{1}{2},j,k}W+\frac{1-\bar{\omega}}{4}\bar{\bar{\Delta}}_{i-\frac{1}{2},j,k}W, \tag{6.40}$$

$$W_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(R)} = W_{i+1,j,k}-\frac{1+\bar{\omega}}{4}\bar{\bar{\Delta}}_{i+\frac{1}{2},j,k}W-\frac{1-\bar{\omega}}{4}\bar{\Delta}_{i+\frac{3}{2},j,k}W. \tag{6.41}$$

定义

$$1\leqslant\omega\leqslant\frac{3-\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}},$$

则带限制器的斜率可以写成

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}_{i+\frac{1}{2},j,k}W &= \Phi(\Delta_{i+\frac{1}{2},j,k}W,\omega\Delta_{i-\frac{1}{2},j,k}W),\\
\bar{\bar{\Delta}}_{i+\frac{1}{2},j,k}W &= \Phi(\Delta_{i+\frac{1}{2},j,k}W,\omega\Delta_{i+\frac{3}{2},j,k}W).
\end{aligned}$$

第四章 4.3.4 节给出了几种常见限制器$\Phi(d_+,d_-)$.

6.2.5.3 Runge-Kutta 时间积分

为了进行时间离散,令$W_{i,j,k}=U,D_{i,j,k}+S_{i,j,k}=D$,将半离散格式写成

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=D.$$

用 K 步龙格-库塔法

$$\begin{aligned}
U^{(1)} &= U^n,\\
U^{(2)} &= U^n+k\alpha_2D^{(1)},\\
U^{(3)} &= U^n+k\alpha_3D^{(2)},
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$U^{(K)} = U^n + k\alpha_K D^{(K-1)},$$

$$U^{(n+1)} = U^n + k\sum_{\sigma=1}^{K}\beta_\sigma D^{(\sigma)}.$$

其中 $D^{(\sigma)} = D(U^{(\sigma)}), D^{(1)} = D^n$.

例如,下面是具有二阶精度的两步 Runge-Kutta 法

$$U^{(2)} = U^n + \frac{k}{2}D^{(1)},$$

$$U^{(n+1)} = U^n + kD^{(2)}.$$

四阶精度的 Runge-Kutta 法有

$$U^{(1)} = U^n,$$

$$U^{(2)} = U^n + \frac{k}{2}D^{(1)},$$

$$U^{(3)} = U^n + \frac{k}{2}D^{(2)},$$

$$U^{(4)} = U^n + kD^{(3)},$$

$$U^{(n+1)} = U^n + \frac{k}{6}(D^n + 2D^{(1)} + 2D^{(3)} + D^{(4)}).$$

6.2.5.4 隐式方法

为了方便,定义空间算子 δ_s 和 $\mu_s(s=1,2,3)$:

$$(\delta_1\phi)_{i,j,k} = \phi_{i+1/2,j,k} - \phi_{i-1/2,j,k},$$

$$(\delta_2\phi)_{i,j,k} = \phi_{i,j+1/2,k} - \phi_{i,j-1/2,k},$$

$$(\delta_3\phi)_{i,j,k} = \phi_{i,j,k+1/2} - \phi_{i,j,k-1/2},$$

$$(\delta_1\phi)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k},$$

$$(\delta_2\phi)_{i,j+\frac{1}{2},k} = \phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k},$$

$$(\delta_3\phi)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k},$$

$$(\mu_1\phi)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{2}(\phi_{i+1,j,k} + \phi_{i,j,k}),$$

$$(\mu_2\phi)_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{2}(\phi_{i,j+1,k} + \phi_{i,j,k}),$$

$$(\mu_3\phi)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi_{i,j,k+1} + \phi_{i,j,k}).$$

为了进行时间离散,令 $W_{i,j,k} = U, D_{i,j,k} + S_{i,j,k} = D$,将半离散格式写成

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = D.$$

令 $\Delta W^{\text{expl}}_{i,j,k} = kD$ 为格式的显式部分,则采用近似 ADI 分解的隐式方法为

$$\Delta W^*_{i,j,k} + \frac{k}{2}\{\delta_1[\mid N_1^{(R)}\mid^n\delta_1(\Delta W^*)]_{i,j,k} + \delta_1[N_1^n\mu_1(\Delta W^*)]_{i,j,k}\} = \Delta W^{\text{expl}}_{i,j,k},$$

$$\Delta W_{i,j,k}^{**} + \frac{k}{2}\{\delta_2[|N_2^{(R)}|^n\delta_2(\Delta W^{**})]_{i,j,k} + \delta_2[N_2^n\mu_2(\Delta W^{**})]_{i,j,k}\} = \Delta W_{i,j,k}^{*},$$

$$\Delta W_{i,j,k}^{***} + \frac{k}{2}\{\delta_3[|N_3^{(R)}|^n\delta_3(\Delta W^{***})]_{i,j,k} + \delta_3[N_3^n\mu_2(\Delta W^{***})]_{i,j,k}\} = \Delta W_{i,j,k}^{**},$$

$$(I - \frac{k}{2}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}W})\Delta W_{i,j,k} = \Delta W_{i,j,k}^{***},$$

$$W_{i,j,k}^{n+1} = W_{i,j,k}^{n} + \Delta W_{i,j,k}.$$

这里 N_1, N_2 和 N_3 为雅可比矩阵 A, B, C 在 3 个网格线方向的投影

$$N_1 = J(A\xi_x + B\xi_y + C\xi_z),$$
$$N_2 = J(A\eta_x + B\eta_y + C\eta_z),$$
$$N_3 = J(A\zeta_x + B\zeta_y + C\zeta_z).$$

$N_1^{(R)}, N_2^{(R)}$ 和 $N_3^{(R)}$ 为相应的 Roe 平均.

6.2.6 条件化预处理方程的离散

令偏微分方程为

$$W_\tau + P(F_x + G_y + H_z) = P(F_x^{(v)} + G_y^{(v)} + H_z^{(v)} - W_t).$$

针对虚拟时间项构造隐式方法.其中物理时间项当作源项处理.设 Δt 为物理时间步长.

现在将 m 记为物理时间步,n 为虚拟时间步.每物理时间步的解对应虚拟时间步的收敛解,即 $W^{n,m+1}|_{n\to\infty} = W^{m+1}$.将物理时间导数用 2 阶差分

$$W_t = \frac{3W^{m+1} - 4W^m + W^{m-1}}{2\Delta t}$$

逼近.在虚拟时间步 n,时间导数为

$$W_t = W_t^n = \frac{3W^{n,m+1} - 4W^m + W^{m-1}}{2\Delta t}.$$

因此,前面的格式完全不变,只是添加下面的源项

$$S^n = -P\left[\frac{3W^{n,m+1}}{2\Delta t} - \frac{4W^m - W^{m-1}}{2\Delta t}\right]$$
$$= -\frac{P}{\Delta t}\left[\frac{3}{2}W^{n,m+1} - \frac{3}{2}W^m - \frac{1}{2}\Delta W^m\right],$$
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}W} = -\frac{3}{2\Delta t}P.$$

由于 $P|A| \neq |PA|$,所以对于迎风型格式,数值通量的构造必须以 PA(见方程(2.65))为基准.

为了有效地实现计算,应该注意如下几个方面的问题:

• 计算的启动使用一阶方法.即对于 $m=0$,物理时间导数采用一阶时间导数.相应的源项变为

$$S^n = -\frac{P}{\Delta t}[W^{n,1} - W^0],$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}W}=-\frac{1}{\Delta t}P.$$

如果也采用二阶方法,则 ΔW^0 很难确定.

• 对应每一物理时间步,虚拟时间步的迭代次数视残值而定.一般要求残值满足

$$\| W^{n+1,m}-W^{n,m} \| = O[10^{-5}].$$

首次计算往往迭代次数比较多.

• 对于双时间步方法,物理时间步长既受精度限制,也受稳定性限制.格式既存在依赖虚拟时间步长的稳定性,也存在依赖物理时间步长的稳定性(Granier, Lerat, & Wu, 1997).

6.3 高维问题初始条件与边界处理

6.3.1 初始条件与边界条件

计算开始时的流动条件称为初始条件.对于非定常问题(即关心解随时间的变化),初始条件一般由所考虑的具体问题给定.对于定常问题(即已经不随时间变化的解),需要以某种初始条件出发,通过(伪)时间迭代,以收敛到定常解.一般考虑的问题定常解是唯一的,即与初始条件无关.但一般不能随意给初始条件.因为在收敛前的迭代过程中,解在随时间变化.虽然这些中间解不需要具有物理意义,但合理的初始条件往往能加快收敛速度、避免出现压力和密度为负.人们可能会通过某种工程估算办法求出近似解作为初始条件.遗憾的是计算流体力学工作者往往不具备流体力学的全部知识.最简单的办法就是令初始条件处处为常数(即等于来流条件).如果差分格式特性较好,边界处理的恰当,则能收敛到定常解.

边界可分为物理边界和人工边界两种.

物理边界是由问题的性质决定的从而是固定的.例如,流体力学中的外流问题的固体壁面和内流问题的进、出口边界都是物理边界.因物理边界上流动的物理性质很明确,或可通过实验测量到,所以物理边界条件的定义比较直观.

人工边界是针对无限或半无限区域,或我们感兴趣的范围永远小于实际区域时而人为引入的.例如,当计算汽车发动机气缸里的流动时,没有必要对长度永远大于气缸尺寸的整个进气道和尾喷管里的流动同时进行计算,而可把边界人为地选在距气缸比较近的地方.当计算外流问题时,尽管实际区域延伸至无限远,可以把外边界选在距固体边界有限远的地方.人工边界的选取带有任意性和经验性,边界条件的给定往往更多的是从数学上考虑,如适定性或无反射.

边界条件也可具体分为远场边界条件、进出口边界条件、固体壁面边界条件和简易边界条件四大类.边界条件的正确定义对解具有重要影响.边界条件又分为解析边界条件与数值边界条件两类.解析边界条件属于偏微分方程定解条件的一部分.例如对于超音速进

口,需给定所有来流条件.这就是解析条件.而对于超音速出口,一切流动参数都由内部流动决定,不需要给任何边界条件.在使用差分格式时,因每一点格式的计算都用到上下左右前后一些点的值,如果这些周围点中的一部分在没有给解析条件的边界上,就需要通过外插或其他办法对流动参数进行定义.这就是数值边界条件.

为了方便,用下标"b"表示将要计算的边界条件,用下标"e"表示从计算域外插获得的值.用下标"∞"表示无穷远条件.本节中用 $\boldsymbol{n}$ 表示边界上指向计算域内的单位法向矢量.

6.3.2 远场边界条件

6.3.2.1 远场边界条件的基本理论

这种边界条件一般是针对外流问题.知道无限远处条件(如马赫数和迎角).但计算时边界只能取在有限远处(人工边界).如果人工边界取得足够远,则可直接用无限远处的条件.但这种'足够'很难有明确定义,与来流马赫数有很大关系.对于超音速流,人工边界可以取得比较近,对于低马赫数流,人工边界必须取得特别远(如 10~100 倍弦长).为了解决这种不确定性,可以使用对人工边界远近依赖程度低的边界条件.实际上,无限远边界的处理可以有 4 种方法:

1)区间变换法.通过坐标变换,将无限区域变换成有限区域.这种方法的缺点是,坐标变换会产生奇点或引起解的震荡,所以在实际计算中很少使用.

2)有限截断法.将外边界选在足够远的地方直接用无限远的条件.例如,对于流动问题,在流体流人部分用均匀流条件而在流出部分给无限远处的压力.这种方法很实用.

3)小扰动方法.将外边界选在某个地方,使得在人工边界以外的区域可用小扰动法求出近似解,作为边界条件.

4)解析边界法.将边界选在某个地方,根据纯数学上的考虑构造某种解析边界条件,如无反射特征边界条件.假设人工边界处于 $x=0$,计算区域定义在 $x>0$.令 l 为雅可比矩阵 A 正特征值的个数,如果边界条件定义为

$$l^{(k)}\frac{\partial W}{\partial t}=0,k=1,2,\cdots,\tag{6.42}$$

(这里 $l^{(k)}$为对应第 k 个特征值的雅可比矩阵的左特征向量)则对于向左传播的一维简单波,人工边界不会产生任何反射;对于向左移动的强度为 ϵ 激波,只产生强度为 $O(\epsilon^3)$的反射波.事实上,由一维特征理论(第三章),沿特征线方向有

$$l^{(k)}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=0,k=1,2,\cdots,5,\tag{6.43}$$

即每一个人射波分量都是从流动参数固定不变的无穷远跟随流体质点过来的,根据上式这些人射波分量应该不变即等于无穷远的值,因此由(6.43)必得(6.42).

在给具体边界条件之前,需要知道边界条件的个数.在一维情况下,由特征理论便可以确定边界条件的个数.对于高维问题,原则上也可以用类似办法.

对于三维欧拉方程，若以垂直于边界的速度分量定义超音速与亚音速，解析边界条件的个数为：

1）亚音速进口：4 个；

2）亚音速出口：1 个；

3）超音速进口：5 个；

4）超音速出口：0 个.

对于 N-S 方程，情况要复杂一些. Strikwerda（1977）从适定性分析，发现解析边界条件的个数为：

1）对于亚超音速进口：5 个边界条件；

2）对于亚超音速出口：4 个边界条件.

Dutt（1988）从稳定性角度导出了一些边界条件. 这些边界条件可以看成是混合狄利克莱-牛曼条件. 而欧拉方程只有狄利克莱型解析条件. Dutt 的混合条件包括两类：

1）欧拉方程边界条件加上一些与导数有关的修正. 这些导数项的影响随雷诺数增加而减小直至可以忽略；

2）纯牛曼条件，即某些偏导数的线性组合（通常是黏性应力）等于零.

纯粹由稳定性理论导出的边界条件物理意义不一定很明了. 在实用中人们还是偏向直接使用欧拉方程的边界条件来计算 N-S 方程.

6.3.2.2　进口边界条件

对于超音速来流（指以法向速度定义的马赫数大于 1 时的流动），所有边界条件等于来流条件

$$\rho_b = \rho_\infty, p_b = p_\infty, u_b = u_\infty, v_b = v_\infty, w_b = w_\infty.$$

以下考虑亚音速来流.

一种办法是使用 H-S 条件. 对于一般外流问题，在离开物体较远处，粘性作用可以忽略. 此时根据无粘流的一些基本理论，熵和总焓等于无穷远处的值，即

$$H_b = H_\infty, S_b = S_\infty.$$

另外来流方向也可认为等于无穷远方向. 而压力则可以通过外插获得

$$p_b = p_e.$$

最后由下面关系式便可求得边界上各流动参数（$\bar{\gamma} = \gamma - 1$）

$$\frac{\gamma}{\bar{\gamma}} \frac{p_b}{\rho_b} + \frac{1}{2} | \boldsymbol{V}_b |^2 = H_b,$$

$$\frac{p_b}{\rho_b^\gamma} = S_b,$$

$$u_b = \frac{| \boldsymbol{V}_b |}{| \boldsymbol{V}_\infty |} u_\infty,$$

$$v_b = \frac{| \boldsymbol{V}_b |}{| \boldsymbol{V}_\infty |} v_\infty,$$

$$w_b = \frac{|V_b|}{|V_\infty|} w_\infty.$$

另一种办法(最好办法)是使用特征边界条件.设雅可比矩阵 N_p(见第二章方程(2.22))的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0, \lambda_4 = \lambda_+, \lambda_5 = \lambda_-;$$
$$\lambda_0 = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}, \lambda_+ = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} + a, \lambda_- = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} - a.$$

对应的左特征矢量(为雅可比矩阵 N_p 的对角化矩阵 L^{-1} 的 5 个行矢量)分别为(方程(2.23))

$$\boldsymbol{l}^{(1)}, \boldsymbol{l}^{(2)}, \boldsymbol{l}^{(3)}, \boldsymbol{l}^{(4)}, \boldsymbol{l}^{(5)},$$

则特征边界条件可以写成

$$\boldsymbol{l}^{(k)} \frac{\partial V_b}{\partial t} = 0 \text{ 或 } \boldsymbol{l}^{(k)} V_b = \boldsymbol{l}^{(k)} V_\infty, k = 1,2,3,4;$$
$$\boldsymbol{l}^{(k)} V_b = \boldsymbol{l}^{(k)} V_e, k = 5.$$

这里前面 4 个关系式对应 4 个正特征值,$V = (p, u, v, w, S)^T$ 为基本变量(如果用守恒变量构造,则十分繁琐但结论一样).

整理后可以写为

$$p_b = \frac{1}{2}(p_\infty + p_e) + \frac{1}{2}\rho a(\boldsymbol{V}_\infty - \boldsymbol{V}_e) \cdot \boldsymbol{n};$$

$$\boldsymbol{V}_b \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{2\rho a}(p_\infty - p_e) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{V}_\infty + \boldsymbol{V}_e) \cdot \boldsymbol{n};$$

$$\rho_b = \rho_\infty \left(\frac{p_b}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, (S_b = S_\infty);$$

$$u_b = u_\infty + (\boldsymbol{V}_b \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}_\infty \cdot \boldsymbol{n}) n_x;$$

$$v_b = v_\infty + (\boldsymbol{V}_b \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}_\infty \cdot \boldsymbol{n}) n_y;$$

$$w_b = w_\infty + (\boldsymbol{V}_b \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}_\infty \cdot \boldsymbol{n}) n_z.$$

最后三个关系式表明,边界上切向速度等于无限远来流的切向速度.

6.3.2.3　出口边界条件

出口条件与进口条件类似.

对于超音速出流(指以法向速度定义的马赫数大于 1 时的流动),所有边界条件均用外插获得

$$\rho_b = \rho_e, p_b = p_e, u_b = u_e, v_b = v_e, w_b = w_e.$$

以下考虑亚音速出流.

如果使用 H-S 条件,则令

$$H_b = H_e, S_b = S_e, p_b = p_\infty.$$

这里 p_∞ 表示出口反压.另外方向也需外插.

最后由下面关系式便可求得边界上各流动参数

$$\frac{\gamma}{\gamma}\frac{p_b}{\rho_b}+\frac{1}{2}|\boldsymbol{V}_b|^2=H_b,$$

$$\frac{p_b}{\rho_b^\gamma}=S_b,$$

$$u_b=\frac{|\boldsymbol{V}_b|}{|\boldsymbol{V}_e|}u_e,$$

$$v_b=\frac{|\boldsymbol{V}_b|}{|\boldsymbol{V}_e|}v_e,$$

$$w_b=\frac{|\boldsymbol{V}_b|}{|\boldsymbol{V}_e|}w_e.$$

另一种办法(最好办法)是使用特征边界条件.设雅可比矩阵 N_p 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_0,\lambda_4=\lambda_+,\lambda_5=\lambda_-;$$

$$\lambda_0=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n},\lambda_+=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}+a,\lambda_-=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}-a.$$

对应的左特征矢量(为雅可比矩阵 N_p 的对角化矩阵 L^{-1}的 5 个行矢量)分别为

$$\boldsymbol{l}^{(1)},\boldsymbol{l}^{(2)},\boldsymbol{l}^{(3)},\boldsymbol{l}^{(4)},\boldsymbol{l}^{(5)},$$

则特征边界条件可以写成

$$\boldsymbol{l}^{(k)}\frac{\partial V_b}{\partial t}=0\text{ 或 }\boldsymbol{l}^{(k)}V_b=\boldsymbol{l}^{(k)}V_\infty,k=4;$$

$$\boldsymbol{l}^{(k)}V_b=\boldsymbol{l}^{(k)}V_e,k=1,2,3,5.$$

这里后面 4 个关系式对应 4 个负特征值.

整理后可以写为

$$p_b=\frac{1}{2}(p_\infty+p_e)+\frac{1}{2}\rho a(\boldsymbol{V}_\infty-\boldsymbol{V}_e)\cdot\boldsymbol{n};$$

$$\boldsymbol{V}_b\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{2\rho a}(p_\infty-p_e)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{V}_\infty+\boldsymbol{V}_e)\cdot\boldsymbol{n};$$

$$\rho_b=\rho_e\left(\frac{p_b}{p_e}\right)^{\frac{1}{\gamma}},(S_b=S_e);$$

$$u_b=u_e+(\boldsymbol{V}_b\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{V}_e\cdot\boldsymbol{n})n_x;$$

$$v_b=v_e+(\boldsymbol{V}_b\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{V}_e\cdot\boldsymbol{n})n_y;$$

$$w_b=w_e+(\boldsymbol{V}_b\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{V}_e\cdot\boldsymbol{n})n_z.$$

6.3.3　固体壁面边界条件

对于固体壁面,流体不能穿透,即至少法向速度为 0.设法向单位矢量为 $\boldsymbol{n}$,则有:

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

上述条件也称无穿透条件.

对于无黏流动问题,固体壁面上切向速度并不为 0.计算时往往还需要给出壁面压力 p_b 和密度 ρ_b.严格来说,(对于 2 维问题)法向压力梯度并不等于零(实用中人们往往设压

力梯度等于零),而是满足下面关系式(压力梯度与离心力平衡)

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \frac{|\boldsymbol{V}|^2}{R}.$$

其中 R 表示曲率半径.上述关系式在实用中并不方便(尤其对于3维问题).

为了获得壁面切向速度和壁面的密度,可以通过外插求壁面总焓和熵

$$H_b = H_e, S_b = S_e.$$

再由关系式

$$\frac{p_b}{\rho_b^\gamma} = S_b,$$

$$\frac{\gamma}{\gamma}\frac{p_b}{\rho_b} + \frac{1}{2}|\boldsymbol{V}_b|^2 = H_b,$$

便可求得壁面密度(ρ_b)与速度大小($|\boldsymbol{V}_b|$).有了速度大小,壁面速度分量便可由下面关系式求得

$$u_b = \frac{|\boldsymbol{V}_b|}{|\boldsymbol{V}_e|}(u_e - \boldsymbol{V}_e \cdot \boldsymbol{n}n_x),$$

$$v_b = \frac{|\boldsymbol{V}_b|}{|\boldsymbol{V}_e|}(v_e - \boldsymbol{V}_e \cdot \boldsymbol{n}n_y),$$

$$w_b = \frac{|\boldsymbol{V}_b|}{|\boldsymbol{V}_e|}(w_e - \boldsymbol{V}_e \cdot \boldsymbol{n}n_z).$$

对于黏流问题,Maxwell 于 1879 年证明,速度满足下面的关系式

$$\boldsymbol{V}_b \approx l\nabla \cdot \boldsymbol{V}_b.$$

这里 l 为流体分子平均自由程.因此壁面速度与壁面速度梯度和分子平均自由程成正比.由于分子平均自由程(稀薄气体除外)一般很小,所以在一般连续流假设下可以令壁面速度各分量都等于零:

$$u_b = v_b = w_b = 0.$$

由于黏性力作用,壁面法向压力梯度仍不等于零(当雷诺数特别大时,可以令压力梯度等于零,此时可令 $p_b = p_e$).

有了壁面压力后,可以通过壁面性质来求得密度.一般考虑两种壁面:

1)绝热壁.此时温度梯度等于零,于是有 $T_b = T_e$.通过状态方程 $\rho_b = \frac{p_b}{RT_b}$ 便可得壁面密度;

2)等温度壁.此时壁面温度 T_b 给定.通过状态方程 $\rho_b = \frac{p_b}{RT_b}$ 便可得壁面密度.

确定壁面压力的最佳(最精确)办法是,在边界上用某种简单(单侧)格式求动量方程,将解投影到法向.此时该投影并不等于零.再把壁面压力进行修正,使得该投影等于零.该方法同时适应无黏和黏流情况.

以边界 $i=1$ 为例,假设边界正好与网格面 $i=1$ 重合.将半离散差分格式写成如下形式

$$\frac{\mathrm{d}W_{1,j,k}}{\mathrm{d}t} = D_{i,j,k} = D_{1,j,k}^{(E)} + \frac{1}{2}D_{1,j,k}^{(V)} + S_{1,j,k}.$$

这里

$$D_{1,j,k}^{(E)} = 2(\overline{F}_{1,j,k}^{(E)} - \overline{F}_{1+\frac{1}{2},j,k}^{(E)}) + \overline{G}_{1,j-\frac{1}{2},k}^{(E)} - \overline{G}_{1,j+\frac{1}{2},k}^{(E)} + \overline{H}_{1,j,k-\frac{1}{2}}^{(E)} - \overline{H}_{1,j,k+\frac{1}{2}}^{(E)},$$

$$D_{1,j,k}^{(V)} = 2(\overline{F}_{1,j,k}^{(V)} - \overline{F}_{2,j,k}^{(V)}) + \overline{G}_{1,j-1,k}^{(V)} - \overline{G}_{1,j+1,k}^{(V)} + \overline{H}_{1,j,k-1}^{(V)} - \overline{H}_{1,j,k+1}^{(V)}.$$

之所以在上面两个关系式的右端第一项出现系数 2,是因为在 i 方向只有半个网格.先假设壁面压力为零,于是 $F_{1,j,k}^{(E)}=0$.由此算得动量的三个分量

$$m_{jk}^{(x)} = (D_{1,j,k}^{(E)} + \frac{1}{2}D_{1,j,k}^{(V)} + S_{1,j,k})^{(2)} \neq 0;$$

$$m_{jk}^{(y)} = (D_{1,j,k}^{(E)} + \frac{1}{2}D_{1,j,k}^{(V)} + S_{1,j,k})^{(3)} \neq 0;$$

$$m_{jk}^{(z)} = (D_{1,j,k}^{(E)} + \frac{1}{2}D_{1,j,k}^{(V)} + S_{1,j,k})^{(4)} \neq 0.$$

它们在边界法向 $\boldsymbol{n}=(n_x,n_y,n_z)=(\xi_x,\xi_y,\xi_z)/\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2}$ 的投影为

$$m_{jk}^{(n)} = m_{jk}^{(x)}n_x + m_{jk}^{(y)}n_y + m_{jk}^{(z)}n_z.$$

如果考虑压力影响,则动量在法向的投影应该等于零,因此必然有参见式(6.7)

$$m_{jk}^{(n)} + 2p_{1,j,k}J(\xi_x n_x + \xi_y n_y + \xi_z n_z) = 0.$$

从而压力的表达式为

$$p_{1,j,k} = -\frac{1}{2}\frac{m_{jk}^{(x)}n_x + m_{jk}^{(y)}n_y + m_{jk}^{(z)}n_z}{J(\xi_x n_x + \xi_y n_y + \xi_z n_z)}.$$

6.3.4 其他边界条件

6.3.4.1 进出口边界条件

可以用与远场边界条件类似的办法定义.值得注意的时,一般进出口条件往往通过实验测量部分给出.例如,出口压力(反压)往往给出.

6.3.4.2 简易边界条件

简易边界条件包括对称条件、周期条件等.

设对称面法向矢量为 $\boldsymbol{n}$,则对称边界条件可以写成

$$\rho_b = \rho_e,$$

$$(\rho\boldsymbol{V})_b = \rho\boldsymbol{V}_e - \rho(\boldsymbol{V}_e\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n},$$

$$(\rho E)_b = (\rho E)_e.$$

6.3.5 条件化预处理特征边界条件

对于可以处理低速问题条件化预处理方程，特征边界条件必须进行修正.

对于来流条件，针对 $V=(p,u,v,w,S)$ 和特征矢量矩阵(2.62)，按

$$\boldsymbol{l}^{(k)}V_b = \boldsymbol{l}^{(k)}V_\infty, k = 1,2,3,4;$$

$$\boldsymbol{l}^{(k)}V_b = \boldsymbol{l}^{(k)}V_e, k = 5;$$

得

$$(\lambda_+ - V_n)(p_b - p_\infty) + \theta\rho a^2(\boldsymbol{V}_b - \boldsymbol{V}_\infty)\cdot\boldsymbol{n} = 0,$$

$$(\lambda_- - V_n)(p_b - p_e) + \theta\rho a^2(\boldsymbol{V}_b - \boldsymbol{V}_e)\cdot\boldsymbol{n} = 0,$$

$$-n_y(u_b - u_\infty) + n_x(v_b - v_\infty) + n_z(S_b - S_\infty) = 0;$$

$$-n_z(u_b - u_\infty) + n_x(w_b - w_\infty) - n_y(S_b - S_\infty) = 0;$$

$$-n_z(v_b - v_\infty) + n_y(w_b - w_\infty) + n_x(S_b - S_\infty) = 0.$$

由最后三个关系式导得

$$S_b = S_\infty.$$

即熵等于来流熵.

整理后可以写为

$$p_b = \frac{\lambda_+ p_\infty - \lambda_- p_e}{\lambda_+ - \lambda_-} - \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}[\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}(p_\infty - p_e) - \rho\theta a^2(\boldsymbol{V}_\infty\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}_e\cdot\boldsymbol{n})],$$

$$\boldsymbol{V}_b\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{V}_\infty\cdot\boldsymbol{n} - \frac{\lambda_+ - \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}}{\rho\theta a^2}(p_b - p_\infty),$$

$$\rho_b = \rho_\infty\left(\frac{p_b}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$u_b = u_\infty + (\boldsymbol{V}_b\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}_\infty\cdot\boldsymbol{n})n_x,$$

$$v_b = v_\infty + (\boldsymbol{V}_b\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}_\infty\cdot\boldsymbol{n})n_y,$$

$$w_b = w_\infty + (\boldsymbol{V}_b\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}_\infty\cdot\boldsymbol{n})n_z.$$

最后三个关系式表明，边界上切向速度等于无限远来流的切向速度.

对于出流条件

$$(\lambda_+ - V_n)(p_b - p_\infty) + \theta\rho a^2(\boldsymbol{V}_b - \boldsymbol{V}_\infty)\cdot\boldsymbol{n} = 0,$$

$$(\lambda_- - V_n)(p_b - p_e) + \theta\rho a^2(\boldsymbol{V}_b - \boldsymbol{V}_e)\cdot\boldsymbol{n} = 0,$$

$$-n_y(u_b - u_e) + n_x(v_b - v_e) + n_z(S_b - S_e) = 0,$$

$$-n_z(u_b - u_e) + n_x(w_b - w_e) - n_y(S_b - S_e) = 0,$$

$$-n_z(v_b - v_e) + n_y(w_b - w_e) + n_x(S_b - S_e) = 0,$$

由此得

$$p_b = \frac{\lambda_+ p_\infty - \lambda_- p_e}{\lambda_+ - \lambda_-} - \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}[\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}(p_\infty - p_e) - \rho\theta a^2(\boldsymbol{V}_\infty\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}_e\cdot\boldsymbol{n})],$$

$$\boldsymbol{V}_b \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{V}_\infty \cdot \boldsymbol{n} - \frac{\lambda_+ - \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}}{\rho\theta a^2}(p_b - p_\infty),$$

$$\rho_b = \rho_e\left(\frac{p_b}{p_e}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$u_b = u_e + (\boldsymbol{V}_b \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}_e \cdot \boldsymbol{n})n_x,$$

$$v_b = v_e + (\boldsymbol{V}_b \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}_e \cdot \boldsymbol{n})n_y,$$

$$w_b = w_e + (\boldsymbol{V}_b \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{V}_e \cdot \boldsymbol{n})n_z.$$

6.3.6 边界条件的隐式化处理

6.3.6.1 隐式化处理原则

先将内点隐式格式写成下面的形式

$$L\Delta W_{i,j,k} = \Delta W_{i,j,k}^{(\exp)}.$$

这里，$\Delta W_{i,j,k} = W_{i,j,k}^{n+1} - W_{i,j,k}^{n}$为时间增量，$L$ 为隐式算子，$\Delta W_{i,j,k}^{(\exp)}$为格式的显式部分(只与旧时刻的值有关).

将边界条件统一写成

$$X_b = SX_e + D.$$

这里 X 可以是守恒变量、特征变量、基本变量等，S 为矩阵，D 为边界值. 将上述条件隐式化得

$$\Delta X_b = S\Delta X_e.$$

由于格式总是针对守恒变量，所以必须把它转换成守恒变量形式. 设

$$\Delta X = Q^{-1}\Delta W,$$

则隐式边界条件变为

$$M\Delta W_b = N\Delta W_e.$$

这里 $M = Q^{-1}, N = SQ^{-1}$.

在定常问题计算中，将边界条件隐式化可以大大加快收敛速度.

6.3.6.2 特征边界条件

设雅可比矩阵 N 按下式对角化

$$P^{-1}NP = (\lambda_0, \lambda_0, \lambda_0, \lambda_+, \lambda_-).$$

这里 $\lambda_+ = V_n + a, \lambda_- = V_n - a, \lambda_0 = V_n$. 对于特征边界条件，有 $Q^{-1} = P^{-1} = L^{-1}A_V^{-1}$(见第二章 2.1 节).

$S=0$ 超音速入口，
$S=I$ 超音速出口，
$S=\mathrm{Diag}(0,0,0,0,1)$ 亚音速入口，
$S=\mathrm{Diag}(1,1,1,0,1)$ 亚音速出口.

6.3.6.3 对称和固体边界条件

设对称面法向矢量为 $\boldsymbol{n}$，则 $Q^{-1}=I$.

$$S=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-n_x^2 & -n_xn_y & -n_xn_z & 0\\ 0 & -n_yn_x & 1-n_y^2 & -n_yn_z & 0\\ 0 & -n_zn_x & -n_zn_y & 1-n_z^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

对于无黏流情况，固体壁面可以近似按对称条件处理. 对于黏流情况，可以近似取 $Q^{-1}=I$，

$$S=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

6.3.7 分区计算的耦合条件

耦合条件的构造是分区计算的关键. 为了简单起见，只用三点格式(即在每个方向格式只有三个点)来讨论. 多点格式与三点格式相比多了几个内边界点，每个内边界点可用同样的方法定义耦合条件，因而没有本质区别.

6.3.7.1 对接网格

依据使用正点对接和错点对接，以及使用格点格式还是格心格式，耦合条件的构造有一些细微差别(Berger，1987；Rai，1986a，b；Lerat & Wu，1996；Wang & Caughey，1993).

Lerat 和 Wu(1996)针对有限体积网格用局部通量构造法对错点对接建立了守恒和无条件稳定的耦合条件. 先考虑二维问题，找出交接线上被两侧网格线划分的最小线段. 通过以最小线段界定的小单元来计算最小线段上的数值通量. 然后把最小线段上的数值通量投影到左右网格的边线上，达到守恒耦合.

所考虑的对接网格如图 6.13(左)所示. 为了求解单元 AA′B′B 中点的差分格式，需要求出线段 AB 上的数值通量. 线段 AB 被网格线 CD 分成 AC 和 CB 两部分(更一般的情况

下被分成多个小线段).

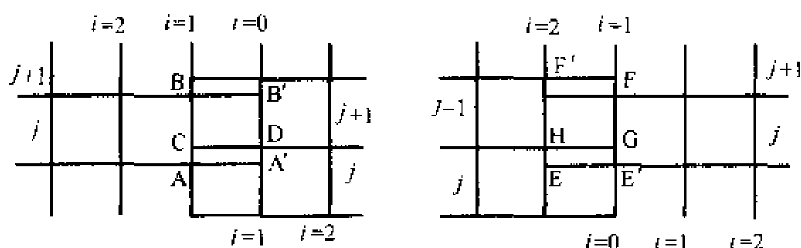


图 6.13　对接网格

左(右)侧界面网格 AA'B'B(EE'F'F)被网格线 CD(HG)分成两部分

设左边区域任意内单元边界$(i+\frac{1}{2},j)$上的数值通量具有如下表达式

$$f_{i+\frac{1}{2},j}=\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(u)}f_{\sigma}(u_{i,j}^{n-\sigma},u_{i+1,j}^{n-\sigma}).$$

这里 $\theta_{\sigma}^{(u)}$ 为常数.

于是对于左边区域,AB 上的数值通量由下式计算:

$$f_{\frac{1}{2},j}=f_{AC}+f_{CB},\tag{6.44}$$

$$f_{AC}=\alpha_j\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(u)}f_{\sigma}(u_{1,j}^{n-\sigma},v_{1,j}^{n-\sigma}),\tag{6.45}$$

$$f_{CB}=(1-\alpha_j)\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(u)}f_{\sigma}(u_{1,j}^{n-\sigma},v_{1,j+1}^{n-\sigma}).\tag{6.46}$$

这里 $\alpha_j=|\boldsymbol{AC}|/|\boldsymbol{AB}|$.

设右边区域任意内单元边界$(i+\frac{1}{2},j)$上的数值通量具有如下表达式

$$g_{i+\frac{1}{2},j}=\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(v)}g_{\sigma}(v_{i,j}^{n-\sigma},v_{i+1,j}^{n-\sigma}).$$

对于右边区域,EF(图 6.13 右)上的数值通量由下式计算:

$$g_{\frac{1}{2},j}=g_{EG}+g_{GF},\tag{6.47}$$

$$g_{EG}=\beta_j\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(v)}g_{\sigma}(v_{1,j}^{n-\sigma},u_{1,j}^{n-\sigma}),\tag{6.48}$$

$$g_{GF}=(1-\beta_j)\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(v)}g_{\sigma}(v_{1,j}^{n-\sigma},u_{1,j+1}^{n-\sigma}).\tag{6.49}$$

这里 $\beta_j=|\boldsymbol{EG}|/|\boldsymbol{EF}|$.

条件(6.44)至(6.49)既保证守恒又保证稳定.

如果使用隐式格式来求解定常问题,则像一维问题一样,构造相应的时间滞后条件.例如,在条件(6.44)至(6.49)中引入时间滞后,便得到

$$f_{AC}=\alpha_j\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(u)}f_{\sigma}(u_{1,j}^{n-\sigma},v_{1,j}^{n-\sigma-1}),\tag{6.50}$$

$$f_{CB}=(1-\alpha_j)\sum_{\sigma=-1}^{s}\theta_{\sigma}^{(u)}f_{\sigma}(u_{1,j}^{n-\sigma},v_{1,j+1}^{n-\sigma-1}),\tag{6.51}$$

$$g_{\mathrm{FG}} = \beta_j \sum_{\sigma=1}^{s} \theta_\sigma^{(v)} g_\sigma(v_{1,j}^{n-\sigma}, u_{1,j}^{n-\sigma-1}), \tag{6.52}$$

$$g_{\mathrm{GF}} = (1-\beta_j) \sum_{\sigma=1}^{s} \theta_\sigma^{(v)} g_\sigma(v_{1,j}^{n-\sigma}, u_{1,j+1}^{n-\sigma-1}). \tag{6.53}$$

滞后耦合影响时间精度和收敛速度.

不难将上述方法推广到三维问题.对于三维问题,先找出交接面上被两侧网格面划分的最小多边形.计算最小多边形上的数值通量,然后把最小多边形上的数值通量投影到左右网格的边界上,达到守恒耦合.

6.3.7.2 覆盖网格

一般插值(Chesshire & Henshaw,1990) 这里就线性插值对基本原理进行简单的介绍.所依据的网格见图 6.14.左(G1)右(G2)网格享有由 1-1′和 2-2′两条边界线界定的覆盖区.子区 G1 中紧靠边界线 1-1′的网格单元上的值用子区 G2 相邻网格单元中点上的值进行线性插值.同样,子区 G2 中紧靠边界线 2-2′的网格单元上的值用子区 G1 相邻网格单元中点上的值进行线性插值.

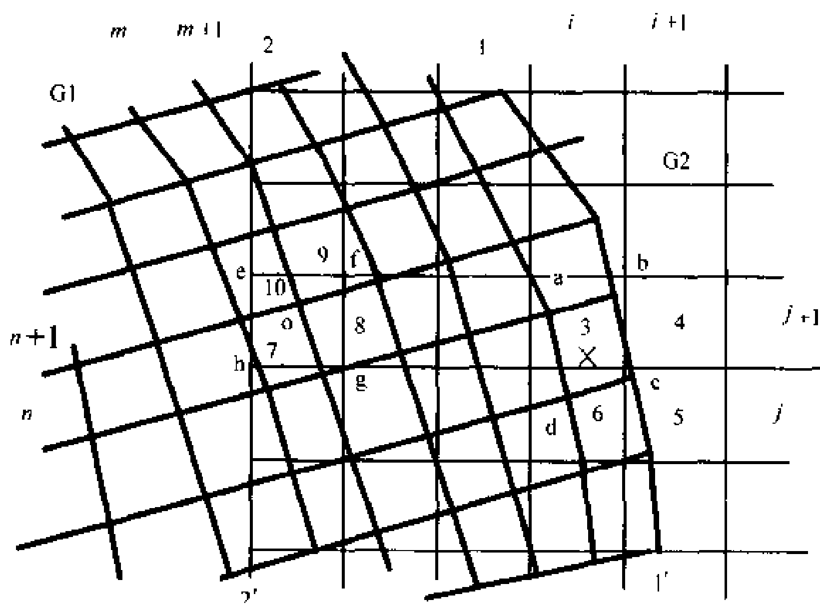


图 6.14 覆盖网格线性插值

先考虑从子区 G2 到 G1 边界的插值.以 G1 边界上网格单元 abcd 为例.该单元中点上的值通过下面的双线性表达式得出

$$q(x,y) = q_1 + q_2 x + q_3 y + q_4 xy. \tag{6.54}$$

为了求得系数 $q_l, l=1,2,3,4$,将子区 G2 上与单元 abcd 相邻的四个单元 3,4,5,6 中点的已知值 $q_{x_3,y_3}, q_{x_4,y_4}, q_{x_5,y_5}, q_{x_6,y_6}$ 代入式(6.54),得四个方程,由此可以唯一地确定系数 $q_l, l=1,2,3,4$.

现在考虑从子区 G1 到 G2 边界的插值. 以 G2 边界上单元 efgh 为例. 该单元中点上的值通过下面的双线性表达式得出

$$q(x,y) = q_1 + q_2x + q_3y + q_4xy. \tag{6.55}$$

为了求得系数 $q_l, l=1,2,3,4$,将子区 G1 上与单元 efgh 相邻的四个单元 7,8,9,10 中点的已知值 $q_{x_7,y_7}, q_{x_8,y_8}, q_{x_9,y_9}, q_{x_{10},y_{10}}$ 代入式(6.55),得四个方程,由此可以唯一地确定系数 $q_l, l=1,2,3,4$.

通量插值(Berger,1987) 考虑图 6.15a 中的内边界单元 AA′B′B. 为了计算该单元中点的值,需要先求出与内边界重合的单元边界 AB 上的数值通量 $\boldsymbol{h}_{\mathrm{BA}}^*$. 该数值通量用左边网格单元边界上的数值通量进行线性插值求得. 具体算法如下:

1)将 AB 分成若干小线段,使得每一小线段被包含在 G1 的一个单元网格中(如图中的 BE,EA);

2)用 G1 中的数值通量内插到每个小线段的中点(如图中的 C,D). 具体插值公式参见(Berger,1987;Part & Sjogreen,1994;Chesshire & Henshaw,1994).

3)将各小线段的数值通量相加,得 AB 总的数值通量. 如对于图中所示的情况,有 $\boldsymbol{h}_{\mathrm{BA}}^* = \boldsymbol{h}_{\mathrm{BE}}^* + \boldsymbol{h}_{\mathrm{EA}}^*$.

再构造插值 考虑 G2 中的内边界单元 ABCD(图 6.15b). 该单元被 G1 中的网格线分割成若干个多边形($P_l, l=1,2,\cdots,5$). 用如下积分式计算单元 ABCD 上的条件 w:

$$\int_{\mathrm{ABCD}} w\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_l \int_{P_l} w(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

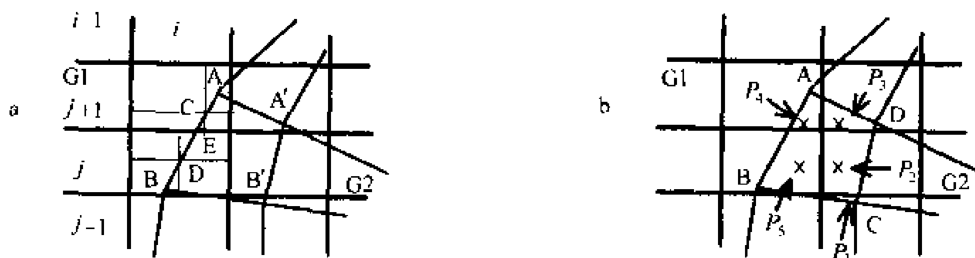


图 6.15 通量插值网格 a 和重构造插值网格 b

上式右端中,每个积分域 P_l 上的被积函数 $w(\boldsymbol{x})$用网格 G1 中的数值解进行重构造. 最简单的办法是用分段常数重构造,即用 G1 中包含 P_l 的单元中点值直接赋给 $w(\boldsymbol{x}\in P_l)$. 精度更高的办法是用分段线性重构造,即用 G1 中与 P_l 相邻的几个单元的值通过线性插值来定义 $w(\boldsymbol{x}\in P_l)$. 这样便有 $w(\boldsymbol{x}\in P_l) = a + bx + cy$. 注意到积分关系式 $\int_P (a + bx + cy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{Aera}(P)(a + bx_c + cy_c)$. 其中$(x_c, y_c)$为 P 的几何重心. 因此为了求每个多边型上的积分,只须保存多边形的几何重心和面积就够了.

一般插值很容易推广到三维问题,只需把插值公式(6.54)或(6.55)改成下面的公式即可:

$$q(x,y,z) = q_1 + q_2x + q_3y + q_4z + q_5xy + q_6yz + q_7zx. \tag{6.56}$$

为了求得系数 q_l, $1\leqslant l\leqslant 7$,只需使用相邻于区离 x,y,z 较近的 8 个点上的已知值即可.

但通量插值和重构造插值推广到三维问题十分困难.一般认为一般插值不守恒,所以有激波时可能出问题.但根据第五章介绍的理论,如果格式的数值黏性不小于 Roe 格式的数值黏性(只需在激波内),那么一般插值也能给出守恒解.因此,最好使用一般插值加具有足够数值黏性的格式.如果格式的数值黏性不满足上述条件,那么只需在内边界附近添加数值黏性,也能获得守恒解.

6.4 并行计算[①]

本节介绍并行计算的一些重要概念(Roose & Driessche,1995;Keyes,1992).

6.4.1 并行计算机结构

6.4.1.1 并行机器的分类

基于指令流和数据流的处理方式(单个或多个指令/数据流)将计算机分成三个主要类别:

SISD(单指令单数据流)系统.它是包含一个 CPU 的常用系统,如工作站和计算服务器,因此能以串行模式处理一个指令流.现在许多大的计算服务器具有不止一个 CPU,但不同 CPU 主要用于执行相互无关的任务(指令流).因此,这种系统应该作为一组 SISD 机器看待.

SIMD(单指令多数据流)系统.这种系统具有许多(简单的)处理元件,数目从 1024 至 64k,它们都可以在封闭步骤里对不同数据执行同一指令.由此单个指令并行地操作多个数据项目.

MIMD(多指令多数据流)系统.在 MIMD 系统中,各处理器对各自的数据独立地执行不同的指令流,所设计的硬件和软件能使各处理器高效地配合.当由不同处理器执行的任务共同形成一个作业时,就发生了并行处理.

6.4.1.2 MIMD 系统的内存组织形式

根据内存组织方式可以进一步划分 MIMD 系统.

1)内存共享 MIMD 系统.在内存共享 MIMD 系统中所有处理器使用一个公共内存.

2)内存分布 MIMD 系统.内存分布式 MIMD 并行计算机由一组处理器组成,每个处理器都有自己的局部内存,由通讯网络来相互联结.每个处理器和它的局部内存合称处理·

① 我的学生邹辉参与了本节的整理.

节点.每个处理节点实际上就是一个完整的计算机,运行时独立于其他节点.节点之间只能通过通讯网络传递信息来进行数据交换.

3)混合内存系统.尽管内存共享和分布式系统似乎有明显的区别,但许多并行系统使用一种混合型内存管理.

6.4.2 并行计算机编程

内存共享和内存分布并行设计中并没有明显的区别,某些并行系统采用了混合型内存机制.然而,可以明显地区别两种不同的编程方式,内存共享式编程和内存分布式编程.在两种模式中,程序在运行时分裂成一些子过程并行处理.大部分情况下,一个处理器只能处理一个子过程.

6.4.2.1 内存共享编程模式

不论内存的组织形式如何,内存共享编程方式基于公共区的存在,即每个处理器能通往每个内存地址.因此,处理器之间的交换通过摄取(写或读)共享数据来实现.接触共享数据的时间可能很不一致,这依赖于共享数据的物理位置(缓冲器,局部存储器,另一个处理器的存储器).

也有可能出现这样的情况,不同处理器要同时使用公共内存的一部分.在此情况下,有必要进行处理器的同步控制.在执行一个程序的串行部分之前也需要同步控制,以确定所有的处理器在串行之前已完成它们的并行操作.

在内存共享编程方式中有能自动实现并行的 Fortran 和 C 编译器.并行控制可以针对循环,也可以针对任务(子程序).

6.4.2.2 内存分布编程方式

在内存分布式编程或信息传递方式中,处理器只能接触自己的内存.无论何时,一个处理器需要另一个处理节点中的数据时,数据必须在处理节点间传送.这样一个信息传递或数据交换步骤包括发送节点的信息准备,通过通讯网络的输送和目标节点的信息接收.另外,在内存分布模式中也有同步控制问题.可能一个处理器中还没有另一个处理器所需要的数据;在此同步点后面的处理器必须等前一个处理器赶上来.为确保处理器间的交流正确进行也需要同步控制.

尽管每个处理器能运行一个不同程序,但最常用的是单程序多数据(SPMD)形式:所有处理器执行同一程序对应于一套数据的不同部分,这就需要对数据和对其进行的操作进行分配.数据分配必须使得处理器间工作负载很好地平衡,并且使数据交换和同步控制量最小.

内存分布式编程经常比内存共享式编程难.程序员必须知道在局部内存中的数据位置,并且可能需要直接地移动或分配这些数据.有关数据分配和所有必要的数据交换的指

令被显式地写在程序中.一个串行程序常常需要做重大改造才能使之并行.

内存分布式程序用常规语言写成,用一个数据交换库来进行数据交换和同步操作.基本数据交换指令允许信息在任意处理节点间发送和接收.送来的信息通常在目标节点由操作系统缓冲,直到应用程序需要这条信息.也有不同的'高水平'指令,如对分布于节点间的一套数据作总体运算(求和和求最大值)和同步控制.

除依赖于机器的数据交换库外,还发展了一些独立于机器的数据交换库.广泛应用的系统是PVM,MPI和PARMACS.这些库或环境中有的(如PARMACS)含有能自动分裂和并合向量和矩阵以及对性能进行跟踪和分析的指令.PVM环境可以用网络把工作站或微机联起来作并行机器使用.许多独立的科研小组已有能力建立微机并行机群,数目从几台至几千台不等.例如,北京大学湍流国家重点实验室用64台微机,清华大学计算流体力学实验室也正在筹建类似机群.

6.4.3 并行性能参数

并行操作的质量经常由得到的加速比或效率来衡量.

一种并行算法在 P 个处理器上运行所得的并行加速比由这个并行算法在单个处理器上运行时间与在 P 个处理器上运行时间之比来定义.并行效率等于加速比除以 P.由此得到如下并行加速比 $S(n,P)$ 和并行效率 $E(n,P)$ 的定义

$$S(n,P)=\frac{T(n,1)}{T(n,P)},E(n,P)=\frac{S(n,P)}{P}=\frac{T(n,1)}{PT(n,P)}. \tag{6.57}$$

n 表示问题的尺度,$T(n,1)$ 和 $T(n,P)$ 指算法分别在一个和 P 个处理器上的运行时间.

注意(6.57)没有给出任何有关并行算法质量的信息.它只衡量一个算法被并行操作的好坏程度.因此,还得补充衡量并行算法数值效率的信息.该数值效率可以定义成单个处理器运行时间的以下比率:$T_{\mathrm{best}}(n)/T(n,1)$.此处,$T_{\mathrm{best}}(n)$ 指由并行计算机的一个处理器运行已知速度最快的串行算法所需时间.并行加速比(或效率)结合数值效率可以用来定义绝对加速比和绝对并行效率:

$$\bar{S}(n,P)=\frac{T_{\mathrm{best}}(n)}{T(n,P)},\bar{E}(n,P)=\frac{\bar{S}(n,P)}{P}=\frac{T_{\mathrm{best}}(n)}{PT(n,P)}. \tag{6.58}$$

实际考虑限制了定义(6.58)的使用.首先是难以确定哪个算法是最好的串行算法;这可能依赖于问题尺度 n、指定使用的硬件、程序编写方式等.另外当可以得到更好的算法时,'最好'的算法这个概念便随时改变.而且,也不总是能良好地实现那个算法.

一个有 P 个处理器的机器运行速度一般不能超过一个单处理器机器的 P 倍①,即有 $S(n,P)\leqslant P$ 和 $E(n,P)\leqslant 100\%$.现在列举一些可能引起偏离线性加速比关系的时耗.

1. 串行部分

一台并行计算机取得的加速比可能因存在一小部分固有的串行部分而被大大的限

① 但也有例外.如果并行算法从正面改变了数值方法的收敛速度,那么并行效率有可能超过100%.见Wu & Zou(2000).

制. Amdahl 定律表述了这个问题：令 α 为在计算中必须串行操作的部分，$0\leqslant\alpha\leqslant1$. 一台有 P 个处理器的并行计算机所能得到的最大加速比如下：

$$S(n,P)\leqslant\frac{1}{\alpha+(1-\alpha)/P}\leqslant\frac{1}{\alpha}. \tag{6.59}$$

例如，当 10% 的程序必须按串行模式运行时，最大加速倍数被限制在 10 以内，而与有效处理器数目无关.

Amdahl 定律成为人们怀疑大规模并行系统可用性的中心论题. 他们的批评在只考虑解一定尺度的指定问题(即 α 为常值)时是有道理的. 但实际上，很少有这种情况，因为问题的尺度往往与处理器数目和计算机的性能成比例. 对于许多计算问题，当问题增大时，串行部分 α 很快趋于 0. 因此，当问题足够大时，α 依赖于处理器数目，(6.59)的重要性减弱了. Gustafson 等人用另一法则代替了 Amdahl 定律. 令 $\bar{\alpha}$ 等于一个有 P 个处理器的并行系统在计算期间内的串行部分. 能得到的最大加速比如下：

$$S'(n,P)\leqslant P(1-\bar{\alpha})+\alpha. \tag{6.60}$$

$S'(n,P)$通常叫做比例加速比. 它等于 $T'(n,1)$对 $T'(n,P)$的比率，$T'(n,1)$是并行程序在单个处理器上要运行的时间，如果这个处理器有足够的有效资源(内存). 在大规模应用中，$\bar{\alpha}$ 值经常很小，并且在大规模处理器上得到非常高的比例加速比.

2. 非最佳算法和算法时耗

最好的串行算法经常很难或不可能并行化(如解三对角线性系统的托马斯算法). 在那种情况下并行算法可能比串行算法需要更大的计算量. 另外，为了避免数据交换所带来的时耗，人们可能希望在不同处理器上重复一些计算，而不是让一个处理器计算后分配结果.

3. 软件时耗

并行控制经常引起(有关的)软件时耗增加，如索引、程序调用等的时耗. 这种方法也常引起循环变短，因而限制了矢量长度. 这削减了矢量计算的使用潜力.

4. 负载不平衡

并行算法的运行时间由负载最多的处理器的运行时间决定. 当计算负载不是均匀分布时，就会引起负载不平衡，并且发生处理器空转：每个处理器必须等待别的处理器完成指定计算.

5. 数据交换和同步控制时耗

任何用于数据交换和同步控制的时间是纯时耗.

6.4.4 分区并行处理

6.4.4.1 引 言

采用网格分区特别适合计算流体动力学的并行处理.这里将注意力集中在内存分布式并行上.这有两个原因:第一,并行系统中只有内存分布系统有'最高'并行结构;第二,在内存分布编程方式中,并行控制语句必须在应用程序中明确给出.为内存分布系统设计的算法也能在内存共享(或混合)系统中很好地运行,数据分配对内存分布系统是必要的,对内存共享系统也是有益的.下面先以显式格式讨论.

每个网格点上的计算一般只涉及几何相邻的网格点,因而使并行变得很容易.通过将网格分裂成子区(子网格)和分配这些子区到并行系统的处理器,就能达到并行计算的目的.每个处理器对分配到那个处理器的(单个或几个)子区进行有关计算.子区之间的联系和数据交换仅与相邻子域之间的内边界有关.

假定将一个二维结构网格分裂成几个大小相等的子区,每个处理器处理 $n_x \times n_y$ 个网格点或单元.再假定显式时间积分基于五点格式,即

$$u_{i,j}^{(n+1)} = f(u_{i-1,j}^{(n)}, u_{i+1,j}^{(n)}, u_{i,j}^{(n)}, u_{i,j-1}^{(n)}, u_{i,j+1}^{(n)}).$$

每个处理器能够独立计算本子域的所有网格点.为了计算子区边界上网格点上的值,处理器必须还知道相邻子域与本子域边界匹配的网格点的函数值 $u_{i,j}^{(k)}$.这个数值必须从相邻处理器中取得.另一方面,边界网格点上的值必须送到相邻区域中去.因此在每步积分之前,相邻的处理器必须互相交换信息.

6.4.4.2 数据交换时耗分析

对上述简单模型问题,若问题尺度为 n,算法在一个有 P 个处理器的并行系统上的运行时间为

$$T(n,P) = T_{\text{calc}} + T_{\text{comm}}.$$

T_{calc}指计算时间,T_{comm}指数据交换时间.假定除数据交换外没有其他时耗,串行运行模式所用的计算时间是

$$T(n,1) = P \cdot T_{\text{calc}},$$

因而加速比和并行效率由下式给出

$$S(n,P) = \frac{PT_{\text{calc}}}{T_{\text{calc}} + T_{\text{comm}}} = \frac{P}{1 + \dfrac{T_{\text{comm}}}{T_{\text{calc}}}} = \frac{P}{1 + f_c},$$

$$E(n,P) = \frac{1}{1 + \dfrac{T_{\text{comm}}}{T_{\text{calc}}}} = \frac{1}{1 + f_c}.$$

这里 $f_c = T_{comm}/T_{calc}$为数据交换时耗与计算时耗的比值(时耗比).如果 f_c 很小,可得近于理想的加速比($S(n,P)\simeq P$)和效率($E(n,P)\simeq 1$).每个处理器发送和接收数据的数量与边界网格点或单元数($2n_x+2n_y$)成比例,而每个处理器所作的计算量则与区域内部网格点即单元数(n_xn_y)成比例.对于模型问题,我们有

$$T_{calc} = c_1 n_x n_y t_{calc},$$

$$T_{comm} = c_2 \cdot 2(n_x + n_y) t_{comm}.$$

t_{calc}代表每个网格点浮点运算所需时间,t_{comm}指数据交换一个浮点数所需时间,c_1,c_2 为常数.由此得到一个重要公式

$$f_c = \frac{c_2}{c_1}\frac{2(n_x + n_y)}{n_x \times n_y}\frac{t_{comm}}{t_{calc}}. \tag{6.61}$$

从这个公式可以看出,时耗比依赖于 3 个因素:

1)几何特征 $2(n_x+n_y)/n_xn_y$:衡量'周界线对表面积'的比率,比率越小 f_c 的值越小;

2)机器特性 t_{comm}/t_{calc}:衡量数据交换速度相对浮点运算速度的快慢程度;

3)算法特征 c_2/c_1:浮点运算量很大(c_1 大)而数据交换运算量小(c_2 小),将使时耗比 f_c 小.

通过进一步分析,可以得出下面的指导性原则:

1)避免发放短信息.大部分数据交换系统有个重要特性,它们具有相当高的信息启动时间.相邻处理器间的一条信息发送时耗可写成

$$T(n) = t_{startup} + n t_{send}.$$

这里 n 指信息长度(传递的字数),$t_{startup}$是信息启动时间(由软硬件弛豫引起),t_{send}是每个字的传送时间.许多系统的 $t_{startup}$大大超过 t_{send}(甚至 1000 倍).由此得出这样的结论:应尽可能避免发送许多短信息.在(6.61)中 t_{comm}指交换一个字的平均时间.因此它将取决于发送信息的平均长度:对短信息有 $t_{comm}\simeq t_{startup}$,而对非常长的信息有 $t_{comm}\simeq t_{send}$.当用(6.61)分析并行算法时必须考虑到这一点.

2)不同网格分裂方法.对模型问题,数据交换量与子区内边界的网格点数成比例,即与子区'周界线'长度成比例.当子区大小一定,如果每个方向网格点数相等,即 $n_x=n_y$,则周界线长度(因面数据交换量)最小,相应的子区称'正方形子区'.因此,分裂成正方形子区能得到最小数据交换量.由此可见,条状(或一维)分裂使子区产生长边界,但最多与两个子区相邻.块状(或二维)分裂给子区以更短的边界,但多达 4 个相邻子区.因而块状分裂使总数据交换量最小,而条状分裂使发送信息次数最少.什么是最好的选择依赖于问题和并行计算机的特性.当信息启动时间决定每条信息数据交换时间时,条状分裂是有利的.注意到所有方向所需数据交换不总是'等量'的,但它们可能依赖于问题特性或数值算法.这些都会影响区域分裂方式的选择.例如,考虑环绕机翼的 N-S 方程的求解.使用湍流模型会导致对垂直于机翼的那个方向的依赖(和数据交换),因而适合使用条状分裂.

3)对子区大小的依赖.当每个子区包括 $N=n_x\times n_y$ 个网格点,并且块状分裂用正方形子区($n_x=n_y$)时,由方程(6.61)得

$$f_c \propto \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{6.62}$$

这表明只要子区大小一定,数据交换时耗比 f_c 便保持恒定,而与处理器数目无关.当然这暗示着当处理器数目 P 增大时,为了保持并行效率不变,总问题尺度 M 也增大,这时因为 $M=N\times P$.关系式 $f_c\propto\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{M}}$也指明,对给定的(总)问题尺度 M,效率和加速比随处理器数目增加而降低(参见 Amdahl 定律).这个分析只在当数据交换只是相邻区域的信息数据交换时有效.任何'总体数据交换'(如,将局部残值加起来计算总残值)暗示着一个随着处理器数目增加而增长的时耗比.然而,这种总体数据交换的相对重要性经常很低,不真正影响总加速比和效率.

4)多点格式和三维网格.上述分析在用其他计算格式代替五点格式时仍有效.这可能有必要在子区交界面使用更宽的覆盖区即覆盖长度.在那种情况下信息交换量(和常数 c_2)增加,但每个网格单元上的运算数量(和常数 c_1)也增加.因此,数据交换时耗比不一定提高.在三维网格情况下,可使用一维、二维和三维分裂.于是,交换量由子区'表面积对体积'比率决定,方程(6.62)中的分母相应改为 $N^{1/3}$.

5)对机器特性的依赖.一个给定算法的加速比和并行效率与机器特性 $t_{\rm comm}/t_{\rm calc}$成比例.现有的不同并行系统所具有的这个特性值很不相同.因而,不同机器的数据交换时耗比根本不同.注意计算机生产厂家也许对他们的处理器和通讯网络交替升级.处理器升级而不同时提高数据交换速度,会产生很大比率 $t_{\rm comm}/t_{\rm calc}$的'不平衡'系统.

6)对问题特性的依赖.计算流体力学应用的特性是,在每次迭代中每个网格点或网格单元上有很多浮点运算,而每个点上只定义少量的(需进行交换的)变量.所以在数据交换时耗比中的因子$\frac{c_2}{c_1}$将很小.结果是,使数据交换时耗比达到最小不总是大大地影响加速比和并行效率.然而,使负载不平衡减到最小总是重要的.因此在许多情况下数据交换时耗比最小和负载不平衡最小是相辅相承的.

6.4.4.3　负载不平衡分析

令第 i 个处理器的计算时间为 $T_i^{\rm calc}, i=1\cdots P$,并且令 $T_{\rm average}^{\rm calc}$和 $T_{\max}^{\rm calc}$分别为 P 个处理器上的平均和最大计算时间.定义负载平衡因子为

$$\lambda(n,p)=\frac{T_{\rm average}^{\rm calc}}{T_{\max}^{\rm calc}}.$$

如果运算数量(按先后顺序计算)不依赖于处理器的数目,并且数据交换时间和处理器空转时间可以忽略,则负载平衡因子是并行效率的很好估计.实事上在这种情况下并行效率由下式给出:

$$E(n,p)=\frac{T(n,1)}{PT(n,P)}\approx\frac{\sum_{i=1}^{P}T_i^{\rm calc}}{P_{\max}(T_i^{\rm calc})}=\frac{T_i^{\rm calc}}{T_{\max}^{\rm calc}}.$$

从而有 $E(n,p)\approx\lambda(n,p)$.

在很多应用中,依据迭代过程的每一次迭代后因更新覆盖区的数据所需要的数据交换来保持处理器之间的一致.在这种情况下,我们可以通过分析一个迭代步来确定加速比和并行效率.假定每个网格点上的运算量为常数,并且数据交换时间可以忽略,则有

$$E(n,p)=\frac{T(n,1)}{PT(n,P)}\approx\frac{M}{PN_{\max}}=\frac{N_{\text{average}}}{N_{\max}}.$$

这里 M 为总的网格点数量,$N_{\max}$为一个子区的最大网格点数,$N_{\text{average}}=M/P$.

假定一个矩形网格在 P 个处理器中分配.如果网格不能在处理器中相等地分配,块状分裂将引起比条状分裂更大的负载平衡因子.分裂成正方形子区将导致最大的负载平衡因子,即最小的负载不平衡.

(外)边界条件处理也是负载不平衡的可能来源.实际上,对一般边界单元作的计算与内单元的不同.为了使边界条件处理引起的负载不平衡最小,边界单元必须尽可能相等地分配到处理器中.

6.4.4.4　并行算法的数值效率

在许多情况下用于并行机器的算法不同于用于串行机器的典型算法.为了得到可接受的并行效率,常对串行算法作修改,以减少数据交换或同步点数量.这可能使算法的数值效率恶化.当串行算法不能简单和有效地并行化时,甚至有必要使用具有不同数值特性(不同运算数量,不同收敛性,…)的完全不同的算法.

1. 显式格式

如果执行了所有必要的数据交换,则显式格式是固有并行的而且并行(网格分裂)不影响数值特性.例如,多步 Runge-Kutta 法每一分步后需要进行数据交换.为了减少数据交换时耗,可以只在完全时间积分步后更新数据(即进行数据交换).省略一些数据交换会稍微影响精度或收敛速度,但能获得更高的总加速比.

2. 隐式格式

当使用隐式方法时情况更复杂.

(1)假定用点松弛方法解生成的线性系统.雅可比松弛是固有并行的.在这种情况下数据交换需要与上面的模型问题完全一样.高斯-赛德尔松弛通常有更好的收敛性.在串行计算机上,典型的高斯-赛德尔迭代按指定顺序扫过网格单元.在向量或并行计算机上网格点需按红-黑交替顺序排列.先对所有'红'点并行运算,然后计算'黑'点.自然(字典式)顺序的高斯-赛德尔法和红-黑顺序的高斯-赛德尔法在收敛速度上是完全不同的.

(2)当使用列松弛时,必须求解(分块)三对角系统.这样便有同一网格线上网格点之间的相互依赖.如果只对一个方向扫描,那么三对角系统(以及相应的数据依赖)只定义在这个方向上.通过使用条状分裂,则可保证每个三对角系统只属于一个处理器.于是每个系统仍可用最佳串行算法托马斯算法求解.如果使用块状分裂,或者对不同方向使用列松弛,则(部分)三对角系统被分布于处理节点之间.这就需要修改隐式系统的算法.算子并

行法(Wang,1981)即属于这种新的算法.然而,这些解法的运算量比托马斯算法高约2倍从而它们的数值效率很低,并且它们也包含串行部分.因为必须解许多三对角系统,后者的缺陷可以通过平均分配串行部分于各处理器中来避免(以一些数据交换为代价).

(3)在求解大量三对角系统的一种替代方法中,可以以流水线方式使用托马斯算法.因为这些并行三对角系统解法与托马斯算法相比有低'数值效率',以数据交换为代价,也许值得用托马斯算法.然而这种方法导致许多短信息交换和(流水线过程的开始和结束时的)负载不平衡.另一种替代方法是用如下的方式求解双向三对角系统.我们知道如果对数据采用条状分裂,则对其中的一个方向三对角系统可用托马斯算法求解.如果人们将不同的条状分裂用于算法的两个阶段,使得在每一阶段任一三对角系统只存于一个处理器中,则在两个方向都可用托马斯算法.这要求数据对两个阶段是完全透明的.因两个阶段数据的完全透明化引起的数据交换量与每个处理器含有的两格点数量成比例.因为计算所消耗的时间与上面有同样的性质,所以并行效率还是可以接受的.在具有不规则边界的有限差分网格上实现半隐式ADI时间积分,上面的第二个方法以总效率衡量是最有效的.

(4)解偏微分方程的并行算法也可基于数学意义上的区域分解.在Schwartz区域分裂方法中使用覆盖子区.在子区边界用近似解,分别在每个子区上解微分方程.产生的近似解提供了解相邻(覆盖)子区边界的新的近似值.必须用迭代法重复这个过程.在Schur-complement方法中,用非覆盖子区.子区问题按定义在子区边界上的变量求解.(通过求解交界面问题或'Schur-complement'问题)计算出边界上的变量后,就能确定子区里面的变量.注意这两种区域分解与不用分解相比,都需要做额外计算.这些额外计算必须看作由并行引起的算法时耗.

(5)Wu&Zou(2000)最近采用覆盖分区算法进行并行计算.所研究的方法具有下面的特性:不需要修改托马斯算法;在每一时间步不要进行迭代;对于定常问题具有接近串行算法的收敛速度;对于非定常问题不改变串性算法的精度.定于定常问题,该方法基于吴子牛提出的最优覆盖长度(Wu,1996):

A)对于定常问题,采用完全滞后耦合条件.如果使用中心耗散格式,则并行效率在覆盖长度(覆盖区网格点个数)接近CFL数时最大;如果使用迎风格式,则并行效率在覆盖长度为2时最大;

B)对于非定常问题,使用的是覆盖-投影技术(见第四章).

6.5　实际计算的某些经验

实际计算中有一些经验性东西.很难对这些经验性东西说出严格道理.它们的介绍对于编程者或许有一些用处.

6.5.1　定常问题收敛剖析

一般通过求解时间相关流动以获得定常流动状态.为了使计算能收敛,必须满足如下几个条件:

1)内点格式最好是耗散型的.

2)边界格式保证 GKS 稳定.如果内点格式耗散,边界格式 GKS 稳定,那么当网格点数量足够多从而各边界相互影响可以忽略不计时,则保证(线性)收敛.

3)初始条件的选取要适当.人们往往认为通过工程估算办法给出近似解作为初场能大大加快收敛速度.实际上,如果内点格式和边界处理恰当,则给均匀流动作为初场也能保证收敛.如果使用好的计算方法,那么收敛到机器零所需要的时间几乎与初试条件无关.

4)内点格式加边界格式定义的边值问题的解必须是唯一的,即解与初始条件无关.如果与初始条件有关,则要么边界处理不恰当,要么计算还没有真正收敛.

为了加快收敛速度,减少计算量,往往需要采取一些特殊措施.主要有如下几种办法:

1)选用收敛速度快的格式.一般而言,耗散越大(即对于同样的波数,放大矩阵的谱半径越小),收敛速度越快.而耗散越大(如一阶迎风格式),定常解的精度又越低,所以收敛速度与精度往往相互矛盾.

2)采用当地时间步长.由于所考虑的问题是定常问题,所以计算过程中的时间精度并不重要.各网格点以稳定性条件所允许的最大时间步长计算.考虑伯格斯方程

$$u_t+\left(\frac{1}{2}u^2\right)_x=0.$$

相应的一阶迎风格式为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\sigma_j}{2}(u_j^2-u_{j-1}^2)^n,\sigma_j=\frac{k_j}{h_j}.$$

这里 k_j 和 h_j 分别为时间步长和空间步长.稳定性条件为

$$\mathrm{CFL}=\frac{k_ju_j^n}{h_j}\leqslant 1.$$

如果取当地时间步长从而有 CFL = Const,则相应的格式退化为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\mathrm{CFL}\theta_j(u_j-u_{j-1})^n.$$

这里

$$\theta_j=\frac{u_j^n+u_{j+1}^n}{2u_j^n}\approx 1.$$

因此,对于非线性伯格斯方程和任意非均匀网格,如果选用当地时间步长,则格式近似等价于下面的均匀网格上的线性运输方程的格式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\mathrm{CFL}(u_j^n-u_{j+1}^n).$$

从而可以加快收敛速度.

3)选用隐式格式.考虑运输方程的迎风格式

$$\Delta u_j^{n+1} + \beta\lambda(\Delta u_j^{n+1} - \Delta u_{j-1}^{n+1}) = -\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n), \quad \lambda = \frac{ka}{h}.$$

相应的谱半径为

$$\rho(\xi) = \begin{cases} \sqrt{(1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)\cos\xi + \lambda^2} & \beta = 0(\text{显式格式}), \\ \dfrac{1}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + 2\lambda(1+\lambda)\cos\xi + \lambda^2}} & \beta = 1(\text{隐式格式}). \end{cases}$$

显然,对于同样的波数,隐式格式允许的时间步长大.而且时间步长越大(即 λ 越大),则对于隐式格式 $\rho(\xi)$ 越小,从而收敛速度越快(实际计算中因非线性效应和高维效应,时间步长还是有限制).另外,隐式格式的求逆也有一些特殊加快收敛速度的方法.

4)采用多层网格技术.这与其它偏微分方程数值求解类似.可以参阅文献(Liu,1998).

如果考察残值 $\lg R_2^n$ 随迭代次数 n 的变化过程,则往往会出现下面的情况:

1)非线性收敛过程.当 $1\leqslant n\leqslant N_1$ 时,所给的均匀来流与固体边界发生强烈的非线性作用并使流场很快与边界条件相适应.残值很快掉两个左右的量级,而且收敛曲线波动较大.

2)激波形成与移动过程.当 $N_1\leqslant n\leqslant N_2$ 时,因激波还在形成和寻找其恰当位置,残值基本维持在同一个量级不变.

3)线性收敛过程.当渡过非线性过程后,收敛曲线呈规则变化,直线下降.如果收敛曲线在下降过程中出现较大波动,则表明没有使用无反射边界条件.当达到机器零时不再有明显变化.

6.5.2 计算不稳定的表现形式、诊断与解决方法

用计算机运行程序对某流动问题进行计算的过程中,可能出现不稳定.主要有下面表现形式:

1)由于线性不稳定,残值一步一步放大.有时很快达到无穷大(指机器允许的最大值).随着计算数据一步一步放大.计算速度可能变得十分缓慢(接近机器所允许的最大值时,运算速度可能变慢,这也与机器有关).数据大到一定程度后,可能引起压力或密度为负或为零.

2)由于非线性不稳定或其他原因,尽管误差不放大,但计算的数值解没有任何意义(如出现压力或密度为负为零).

3)出现除零或负数开根号或无限大数据的任何运算等非法运算后,计算会出现这样的可能性:要么立即自动停止运算(跳出),所有计算的数据全部丢失;要么先生成可以追回部分数据的 Core 文件(一般特别大,需要很长时间储存,在储存过程中机器往往没有响应)后再跳出;要么继续运算,数据没有任何意义(如果打印数据,形式为一些无法理解的符号).

如果属于线性不稳定(出现残值快速变大),则有两方面的原因:

1)格式或边界处理本身不稳定.格式不稳定的可能性较小,因为如果是格式研究者,

他应该研究稳定的格式;如果是格式应用者,他应该使用比较成熟的格式.往往出自边界处理,因为格式与边界条件不能随意组合,否则可能出现不稳定.通过打印局部残值,也可以看出残值在什么地方放大最快,由此确定问题发生在什么地方.在边界处理不稳定情况下,方法研究者可以通过稳定性理论指导研究稳定的方法.应用工作者可以更改边界处理,先使用精度最低稳定性最好的处理.保证稳定后再试探性加精度更高的边界条件.

2)格式或边界处理本身稳定.此时往往程序编写出现了错误.这种错误可能对任何人都会出现.出现这种情况后,需要化大量时间去检查软件.

如果属于非线性不稳定或其它原因(使计算因除零或其它非法运算跳出),那么原因的诊断和解决将十分困难.可以从下面几点入手.

(1)如果所计算的问题属于强非线性问题,如强激波问题、湍流问题(带源项处理)、化学反应问题等,检验一下程序对更简单问题是否能运行.如果能运行,则说明非线性不稳定来自强非线性效应.要么在强非线性区域使用精度更低稳定性更好(更皮式)的计算方法,要么用精度更低的方法计算一个几乎收敛的初场,再用本来要用的格式完成最后的迭代.

(2)如果是在起动过程出现困难,则往往在边界附近出现非法运算.此时可以换用精度更低的边界处理启动,或者开始计算时选择更小的时间步长.

有时问题还出在其他一些方面.例如,如果某些参数没有赋值,一般机器可能查不出来,从而出现程序在某些机器上能运行,而在另外一些机器上不能运行的情况.还有一些其他情况.比如,果用单精度和双精度计算,或使用不同字长的机器进行计算,往往对于需要判别正负和为零的运算会出现不同的结果.

6.5.3　结果可靠的必然因素与偶然因素,物理涡与数值涡

在应用软件计算某具体流动问题时,可能出现某些结果与实验结果十分接近,某些误差较大的情况.除了计算方法的精度外,有时还有一些其他因素.

首先是必然因素.同样的计算方法,用到不同的流动问题,计算精度不一样.例如,超音速问题的计算结果往往比亚跨音速结果要好.这是因为,超音速问题各特征波的传播速度比较接近,而且主要是单向传播,所以各特征分量误差之间的耦合积累效应小.对于亚音速流动,不同特征分量所对应的波的传播方向不一样,相互之间的耦合作用强,误差容易积累.对于跨音速流动,除有亚音速流动同样的问题外,在音速附近方程展示某种刚性,误差容易被放大.

还有一些不容易知道具体原因的偶然因素.例如,用欧拉方程计算流动问题时,某些物理量如升力系数可能比用 N-S 方程的结果好.这是因为,采用欧拉方程因没有计入附而层的影响升力系数被高估了.但一般格式有振幅误差(大小与网格稀密等有关)从而使升力系数被低估.两种效应相抵,可能反而出现正好与实验结果相符较好的结果.还有一些人为的因素.比如在收敛过程中升力系数在上下脉动,如果正好脉动到与实验结果一致时停止计算,便出现伪相符现象.

从流体力学旋涡动力学理论(理想正压流体旋涡不生不灭)知道,如果初场为无旋流

动(如均匀流初始条件),则使用欧拉方程不会算出涡来.但实际计算中用欧拉方程也能算出涡来,而且数值涡往往能定性地反映出某种物理涡.常见到这样的问题:欧拉方程为什么能算出涡?这种涡属于纯数值涡还是物理涡?

实际上,即使正确理解这个问题,也需要有较强的流体力学基础知识.如果我们注意一下欧拉方程的计算结果,则不难发现涡都是从几何奇点(旋成体头部、翼身组合处、双三角翼拐角、翼尖与翼梢、尖尾翼型尾部等)拖出来的.如果物体存在尖前缘或者尖尾缘(如机翼),那么由于黏性作用,在尖缘处必然满足所谓的库塔条件,即流体不能绕过尖缘流动(否则速度趋于无限大)而只能出现这样的情况:物体上下表面的流体在尖缘处会合.这样会合的结果便使绕物体表面产生了环量,相当于存在一个涡管,涡管壁与固体壁面重合.涡管强度与来流条件和物面几何形状密切相关.根据旋涡动力学基础,涡管强度在涡管中为常数而且不能终止,因此根据几何体的性质不同会出现如下两种特殊情况:

1)如果物体有限,如飞行器,那么在物体终止的地方(如三维机翼的翼尖或翼梢处)拖出涡来.

2)如果两段形状不一样的几何体交接在一起(如双三角翼两段结合处),则由于每段因满足库塔条件引起的涡管强度不一样,二者在结合处不能平衡掉,所以必然拖出一个涡来,拖出的涡的强度等于二者之差.

虽然欧拉方程本身不具备黏性,但格式都或多或少存在一点数值黏性,数值黏性与几何奇点处的大梯度相互作用便使库塔条件自动满足.一旦库塔条件满足,(拖出的)涡的强度便只依赖来流条件和物体几何形状,而与(物理或数值)黏性大小关系不大.这就是为什么欧拉方程能算出涡来,而这些涡又正好与物理涡相对应甚至定量相符的原因.

虽然如此,必须注意如下两点:

1)在尖缘附近网格必需足够密而且格式精度足够高,否则数值黏性的作用体现不出来从而使库塔条件不能真实满足.这就是为什么有时能算出涡来、有时只能算出部分涡来的原因.

2)这里指的涡不同于因流动分离引起的涡.用欧拉方程一般不能算出分离涡来.

附录 计算流体力学的作用与地位

人们总是喜欢问这样的问题:对于所考虑的问题到底选用何种计算方法?通用软件是否可以解决所有问题?计算结果是否可靠?与实验结果相比误差可否小于多少?计算可否代替实验?

这种问题很难给以令人信服的解答.实际上个人经验很重要.以下是一种简单的答复.

针对不同的流动问题应该使用不同的计算方法.但人们正在尽量寻求所谓的统一计算方法,如不可压-可压流动统一计算方法、连续流动-稀薄气体流动统一算法等.尽管80年代就有学者指出,计算方法已经成熟,已经可以解决所有问题了,但计算方法还在发展,还可能有突破性发展.方法的选取受所在的实验室历史传统的影响,如果实验室的开拓者

自己曾开发或习惯了一种方法,则以后的研究者一般(不敢不)沿用或发展同样的方法.方法研究者一定举出令人信服的(实际上许多结果中是最好的)结果,表明自己的方法的优越性.不受约束的研究者往往对大量已经存在的方法进行客观比较,通过一定的积累和相互交流产生共识,最后是综合性能较好或者推广工作做得较好的方法被大量使用.

尽管有通用性很强的商业软件,但不存在可以解决所有问题的软件.例如,用于工程问题的商业软件精度相对较低,不能用于解决精度要求很高的机理问题研究.目前市场上存在大量商业软件,各自的广告都做得特别漂亮,都能方便地解决许多工程应用问题,购买软件时除需要了解软件所具备的功能是否满足实际问题需要外,其他考虑应该与购买一般商品的考虑(价格、包装、广告效应等)相类似.

计算结果是否可靠与软件使用者对方法的理解和流动问题的理解以及所遇到的具体问题很有关系.计算结果应该与实验结果进行比较,基本符合后才能推广应用于同类问题其它相近的流动条件的计算,否则可能会因程序编写错误、给了错误的流动条件(包括来流参数、几何条件、边界条件)、计算精度差(方法精度低、网格太粗、物理模型如湍流模型不合适)等原因使得计算结果严重偏离实际结果.计算结果可靠与否并不意味着它能与实验结果百分之百的对上.任何方法包括实验测量都会有误差.可靠性的正确理解应该是,在软件使用没有错误的前提下,在多大程度上可以接受计算的误差.计算结果的可靠性与所考虑的问题的类型有关.如果所解决的问题属于超音速流动,此时计算结果一般比较可靠.如果属于跨音速流动,则计算结果与数值方法的精度、几何奇点的处理、湍流模型的选取等有很大关系.不同流动参数的精度也不一样,与压力有关的参数一般能算得准一点,而摩擦力的精度一般较差.

正因如此,计算一般不能代替实验.既然如此,为什么还要进行计算?这牵涉到如何理解计算的作用问题.

首先,计算与实验在解决实际问题中可以起互补作用.用实验验证的计算方法与软件可以对许多流动条件进行计算,得出指导性与方向性结果.而如此进行实验费用太高.利用计算结果可以近似选择最佳设计.最后用实验进行修正或证实.

其次,计算可以解决一些实验不能处理的问题.对于许多工程问题,在实验室很难实现其真实流动条件,如高温与真实气体效应等.实验研究往往只能部分满足某些流动条件,这样实验结果不一定能真实反映实际流动.例如用缩小尺寸的模型进行实验,很难做到马赫数与雷诺数都等于真实流动的相应值.但在物理模型足够可靠和计算方法足够精确的前提下,可以随意给定所需要的参数(只在软件中或数据文件中该相应的参数即可)来进行计算模拟.

还有所谓的反问题.要求预先给定流动结果(如物面压力分布或某些重要的气动参数等),然后通过计算来确定物面形状.或者从给定的基本形状开始,为优化某一气动参数(如减小阻力,提高升力)来修改物面形状.预先给定的流动结果或指定的优化指标称为约束条件.通过控制理论与变分原理,将约束条件与流体力学基本方程进行耦合,将物面形状(参数化后把参数)作为未知数来求解.也可以通过大量不同形状物体的流动进行计算,再辅以某种求极值的方法如基因算法来选择最佳形状.这些都是实验无法做到的.

另外计算也可以用于研究某些基本流动现象,获得流场的时空变化规律,使计算成为

唯一的研究手段.

总之,计算的作用不能过高估计与过低估计.计算只有与实验进行有机结合才能发挥重要作用.对于解决工程问题,计算可以帮助选型、减少设计费用、缩短设计周期,但在定型时还需进行实验测量与修正.对于某些特殊问题,计算还可以代替实验.设计部门在使用计算结果时,很少过分强调结果的精确度;对他们而言,只有明确使用计算的目的才能正确利用计算结果.优秀的工程师对于不合理的计算结果自然具有判别力,在他判定计算结果基本合理或者对于某种特许流动条件被某具体实验验证后,才能使用拓宽流动范围的计算结果.

参 考 文 献

[1] M. Berger, *On conservation at grid interfaces*, SIAM J. Numer. Anal., 24(1987), pp.967 - 983.

[2] G. Chesshire and D. Henshaw, *Composite overlapping meshes for the solution of partial differential equations*, J. Comput. Phys., 90(1990), pp. 1 - 64.

[3] G. Chesshire and D. Henshaw, *A scheme for conservative interpolation on overlapping grids*, SIAM J. Sci. Comput., 15(1994), pp.819 - 845.

[4] P. Dutt, *Stable boundary conditions and difference schemes for Navier-Stokes equations*, SIAM J. Numer. Anal., 25 (1988), pp. 245 - 267.

[5] B. Granier, A. Lerat, and Z. N. Wu, *An implicit centered scheme for incompressible one and two-phase flow computations*, Computers and Fluids, 26(1997), pp. 373 - 393.

[6] C. B. Hwang and C. A. Lin, *Improved Low-Reynolds-Number k-ε Model Based on Direct Numerical Simulation Data*, Journal: AIAA J., 36(1998), pp. 38 - 43.

[7] A. Lerat and Z. N. Wu, *Stable conservative multidomain treatments for implicit Euler solvers*, J. Comput. Phys, 123(1996), pp. 45 - 64.

[8] C. Q. Liu, *Multigrid method for steady and time-dependent flow*, CFD Review 1998, Vol. 1, pp. 512 - 535.

[9] E. Pärt-Enander and B. Sjögreen, *Conservative and non-conservative interpolation between overlapping grids for finite volume solutions of hyperbolic problems*, Computers and Fluids, 23(1994), pp. 551 - 574.

[10] M. M. Rai, *A conservative treatment of zonal boundaries for Euler equation calculations*, J. Comput. Phys., 62 (1986), pp. 472 - 503.

[11] M. M. Rai, *A implicit, conservative, zonal-boundary scheme for Euler equation calculations*, Computers Fluids, 14(1986), pp. 295 - 319.

[12] D. L. Rigby, *Method of weakest descent for automatic block merging*, Proceeding of Intern. Conf. Numer. Meth. Fl. Dyn., Monterey, June 24 - 28, 1996.

[13] D. Roose and R. Driessche, *Parallel computers and parallel algorithms for CFD: an introduction*, AGARD Report R-807, 1995.

[14] J. A. Shaw and N. P. Weatheril, *Automatic topology generation for multiblock grids*, Appl Math. and Comp., 2 (1992), pp. 355 - 388.

[15] J. L. Steger and J. A. Benek, *On the use of composite grid schemes in computational aerodynamics*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 64(1987), pp. 301 - 320.

[16] J. C. Strikwerda, *Initial boundary value problems for incompletely parabolic systems*, Comm. Pure Appl. Math., 30 (1977), pp. 797 - 822.

[17] E. Turkel, *Review of preconditioning for the compressible fluid dynamic equations*, CFD Review, 1(1998), pp. 449 - 477.

[18] H. Wang, *A parallel method for tridiagonal equations*, ACM Trans on Math. Software, 7(1981), pp. 170－183.

[19] L. X. Wang and D. Caughey, *Multiblock/multigrid Euler method to simulate 2D and 3D compressible flow*, AIAA paper 93－0332, 1993.

[20] Z. J. Wang, *A fully conservative interface algorithm for overlapping grids*, J. Comput. Phys., 122(1995), pp. 96－106.

[21] D. C. Wilcox, Turbulence modelling for CFD, DCW Industries, 1994.

[22] Z. N. Wu, *Anisotropic Cartesian grid method for viscous flow computations*, Computational Fluid Dynamics Review, 1998, World Science, pp. 93－113.

[23] Z. N. Wu and H. Zou, *Grid overlapping for implicit parallel computations of compressible flows*, J. Comput. Phys., 157(2000), pp. 2－43.

索　引

名词按汉语拼音对应的英文字母排顺序,在括号内注明章节位置

Y

Z

编 后 语

笔者在著书的过程中无数次听到这样的善意询问:已经有那么多计算流体力学书了,你的书有什么特色?

编写《计算流体力学基本原理》的目的很明确:用有限的篇幅,试图协调连贯地介绍计算流体力学较为规范的内容.计算流体力学较为特别,一方面需要较强的数学知识,另一方面又需要较强的力学知识.从事计算流体力学工作的主要有两部分:流体力学工作者和应用数学工作者.流体力学工作者可能没有数值分析背景,应用数学工作者可能没有接触过流体力学.从流体力学基本原理开始,逐步涉及计算模型、方程理论、算法基础和算法分析,最后以实用化基础结尾,正是为了兼顾不同背景的科研工作者和学生的需要.如果这部分地回答了上面的善意询问,那么笔者就心满意足了.与其他计算流体力学书籍不同,本书单独抽出一章描述流体力学基本原理.这一章尽量强调与计算流体力学相联系的内容,偶尔提到一些与计算有关的十分生疏的概念,如第一章一开始就提到如何针对拉格朗日方法定义定常流动.

编写本书的过程中,笔者尽量避免手册式地介绍这样的和那样的格式、这样的和那样的边界处理、这样的和那样的物理模型,而是尽量强调背景和原则.由于精力所限,某些部分没有做到这样一点.最明显的例子就是限制器的介绍.构造限制器有严格的原则和理论,但本书没有介绍这些原则和理论.由于本书涉及流体力学基本原理、一些分析理论和一些实用化基础等跨度较大的内容,所以前后连贯处理较为重要(最麻烦的莫过于符号统一),因此某些其他书本认为重要的内容忽略了;而某些内容又得到过分的强调.例如,第五章中以较大篇幅介绍了有限网格上的守恒分析和一些启发式的趣味分析.这些都是作者的个人研究内容,不能算着计算流体力学的规范内容.另外第六章花了较多篇幅将曲线网格上的有限差分法和有限体积法统一起来.所有这些,都是体现本书不同于其他计算流体力学专著的特点.这些也算是对上面善意询问的答复.

如果把诸如空间离散、时间积分和边界处理等数百种已知的方法进行这样和那样的罗列式组合以获得新方法,那么手册式地介绍一些方法就够了.但那不是计算流体力学的本质.本书强调的侧面正是为了避免上述罗列式思维.

计算流体力学是一门快速发展的学科,新的研究趋势在随时改变.初学者应该通过各种途径把握新的动态.例如,近期的方法研究有如下特色:①物理模型与数值分析相结合的方法研究,如分子动力学计算方法(kinetic scheme,lattice BGK scheme)的研究;②统一方法研究,如可压-不可压统一方法、连续介质-稀薄气体统一方法、欧拉/拉格朗日统一方法;③混合解析/数值方法研究.

在 Web of Science 上输入相应的关键词,读者便能找到大量相关文献.另外,每人手

头一套自编的从网格构造、流场计算和绘图的计算软件的时代早就结束.国外趋势是,基础研究者往往与商业软件开发商直接建立联系.另外,可以相互利用合作者的软件减少重复的工作.

一个十分矛盾的问题一直困扰计算流体力学本身的定义.一方面计算流体力学从字面理解应该是侧重流体力学,计算只是手段.但是,由计算得出的流体力学知识很难作为规律单独写进力学书籍.计算很难得出普遍规律,只能给出一些(甚至带有误差的)特解(以满足特定的工程需要包括优化设计)和在特定条件下揭示一些流动图像和变化趋势(以配合机理研究).因此传统意义上的计算流体力学还是侧重计算理论和计算方法,当然这些理论与方法必须与流体力学本质紧密结合,否则就不能叫计算流体力学,而应该称为计算偏微分方程了.流体流动的本质包括双曲特性、非线性特性、守恒特性、弱解的存在、特征波的存在,等等.

本书获得国家自然科学基金委员会资助出版,在此表示感谢.

编著者

2000 年 7 月